

分类号

密级

UDC

编号

中南大學

CENTRAL SOUTH UNIVERSITY

硕士学位论文

论文题目 基于二型三角模糊数的

多准则决策方法与应用研究

学科、专业 管理科学与工程

研究生姓名 韩知秋

导师姓名及
专业技术职务 王坚强 教授

原创性声明

本人声明，所呈交的学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除了论文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得中南大学或其他单位的学位或证书而使用过的材料。与我共同工作的同志对本研究所作的贡献均已在论文中作了明确的说明。

作者签名：_____ 日期：_____年___月___日

学位论文版权使用授权书

本人了解中南大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留学位论文并根据国家或湖南省有关部门规定送交学位论文，允许学位论文被查阅和借阅；学校可以公布学位论文的全部或部分内容，可以采用复印、缩印或其它手段保存学位论文。同时授权中国科学技术信息研究所将本学位论文收录到《中国学位论文全文数据库》，并通过网络向社会公众提供信息服务。

作者签名：_____ 导师签名_____ 日期：_____年___月___日

摘要

在模糊多准则决策中，隶属度反映了决策者的确定程度，但有时隶属度难以以精确数的形式给出，而用模糊数来表示更为恰当。然而，现有研究大多针对于隶属度为离散值或区间数的二型模糊集(数)，这样的隶属度经常不能完全反映决策者的确定程度，而使用三角模糊数来表示连续的隶属度更合适。本文称这类二型模糊数为二型三角模糊数。

本文研究了二型三角模糊数及其在多准则决策中的应用，主要工作如下：

(1) 定义了二型三角模糊数的运算规则、记分函数、可能度公式和距离，并定义了一些信息集结算子以集结二型三角模糊信息。针对隶属度难以用精确数字来衡量的多准则决策问题，给出用二型三角模糊数来表示决策信息的方法，选用不同的信息集结算子集结信息，以解决相应的模糊多准则决策问题。

(2) 给出求解准则权重的方法，提出三种多准则决策方法：

聚类方法首先计算出整体效益值和个别遗憾值，找出使整体效益值和个别遗憾值最大、最小的值，将这些值组成理想方案和负理想方案，并将这两个方案加入方案集中，计算新方案集中各方案的相似度，并对相似度矩阵进行模糊聚类，以选出最优方案；

后悔理论方法通过后悔函数和效用函数确定方案的后悔效用决策矩阵，进而集结得到综合后悔效用值，综合考虑决策者在决策后对于所选方案的效用以及对于未选方案的后悔程度，并根据优序净流对方案排序。

理想点方法首先求得决策者对各方案的心态指标，据此找出正理想点与负理想点，计算各方案到正、负理想点的差的绝对值，进而计算出各方案的综合属性值，并按其排序。

(3) 将理论成果应用于绿色供应商选择问题中以验证方法的可行性和有效性。首先分析绿色供应商选择的影响因素，确定了决策准则，并将语言决策信息转化为二型三角模糊信息；然后挑选两种模糊多准则决策方法进行决策，得到决策结果；最后，将它们的结果和简单加权平均的结果以及决策信息本身进行比较、分析和讨论。

关键词 多准则决策方法，二型三角模糊数，绿色供应商选择

ABSTRACT

Membership degrees reflect the decision maker's confidence in a fuzzy decision making problem. This degree of an element in a certain fuzzy set is hard to be expressed with a real number. Using fuzzy sets to express these membership values is reasonable. The existing studies mostly focus on the type-2 fuzzy set (number) whose membership is discrete or denoted by intervals. Such membership often cannot reflect the decision makers' confidence well. Using a group of triangular fuzzy numbers to denote continuous fuzzy memberships is more adequate. We call such type-2 fuzzy numbers as triangular type-2 fuzzy numbers.

This paper studies triangular type-2 fuzzy numbers and its application in multi-criteria decision-making:

(1) The operational laws, score function, possibility degree and distance are defined. For aggregating the triangular type-2 fuzzy information, some aggregation operators are also introduced. For the problem of the multi-criteria decision making which the uncertainty of the criteria values is difficult to give with an accurate number, triangular type-2 fuzzy number is used to show the decision information. And multi-criteria decision-making method based on different triangular type-2 operators is proposed.

(2) Methods of criteria weights problems are developed. And three methods are proposed to handle multi-criteria decision-making problems:

Firstly, cluster method calculates the overall benefit value and the individual regret value. Then the maximum value and the minimum value of them will be found. Take them as the ideal and negative ideal solutions, and add them into the solution set. Thirdly, calculate the similarity of each solution in the new solution set. Finally, in order to find the best solution, similarity matrix will be clustered.

In regret theory method, the regret utility matrix is attained by using the regret function and utility function. Then the regret utility values come out. Not only is the utility of the selected alternatives but also the regret degree to the unselected ones taken into account. And the ranking

of alternatives is gotten by using the outranking net flow.

Ideal point methods firstly calculate the attitude index. Then, by finding the ideal and negative ideal solutions and distances of them, the comprehensive attribute values and the rank of the alternatives can be obtained.

(3) An example of green supplier selection is provided to demonstrate the feasibility and effectiveness of the proposed method. Firstly, the influencing factor of the green supplier selection is analysed, and the criteria are obtained. The linguistic information is transformed into triangular type-2 fuzzy information. Then two fuzzy multi-criteria decision making methods are used. Finally, their results are compared and discussed with weighted average method and the information.

KEY WORDS multi-criteria decision-making method, triangular type-2 fuzzy number, green supplier selection

目 录

摘 要.....	I
ABSTRACT.....	II
目 录.....	IV
第一章 绪论.....	1
1.1 引言.....	1
1.1.1 研究背景.....	1
1.1.2 研究目的及意义.....	2
1.2 国内外研究现状.....	3
1.2.1 模糊多准则决策研究现状.....	3
1.2.2 二型模糊多准则决策研究现状.....	4
1.2.3 绿色供应商选择研究现状.....	7
1.3 研究内容和论文结构.....	9
1.3.1 主要研究内容.....	9
1.3.2 本文逻辑结构.....	10
第二章 理论基础.....	11
2.1 二型模糊集理论.....	11
2.1.1 二型模糊集定义.....	11
2.1.2 二型模糊集的运算规则.....	12
2.1.3 二型模糊集的质心.....	12
2.2 二型三角模糊数.....	13
2.2.1 二型三角模糊数定义.....	13
2.2.2 二型三角模糊数运算规则.....	15
2.2.3 二型三角模糊数的记分函数.....	19
2.2.4 二型三角模糊数的可能度公式.....	20
2.2.5 二型三角模糊数的距离.....	22
2.3 权重确定方法.....	22
2.3.1 离差最大化方法.....	22
2.3.2 信息熵法.....	24
第三章 二型三角模糊决策信息集成算子及其相关决策方法.....	25
3.1 加性二型三角模糊决策信息集成方法.....	25
3.1.1 $TT2OWA$ 算子.....	25
3.1.2 $TT2WAA$ 算子.....	27
3.1.3 $TT2HA$ 算子.....	31
3.1.4 $ITT2OWA$ 算子.....	32
3.2 积型二型三角模糊决策信息集成方法.....	33
3.2.1 $TT2OWG$ 算子.....	33
3.2.2 $TT2WGA$ 算子.....	34
3.2.3 $TT2HGA$ 算子.....	34
3.2.4 $ITT2OWG$ 算子.....	35

3.3 准则间有关联的二型三角模糊决策信息集成方法.....	36
3.3.1 $TT2PA$ 算子.....	36
3.3.2 $TT2PWA$ 算子.....	38
3.3.3 $TT2POWA$ 算子.....	40
3.4 二型三角模糊决策信息集成算子的相关决策方法.....	41
3.4.1 基于 $TT2OWA$ 算子的多准则决策方法.....	41
3.4.2 基于 $ITT2OWA$ 算子的多准则决策方法.....	43
3.4.3 基于 $TT2WAA$ 算子和 $TT2OWA$ 算子的多准则决策方法.....	45
3.5 本章小结.....	49
第四章 基于二型三角模糊数的多准则决策方法.....	50
4.1 处理决策信息权重的方法.....	50
4.1.1 综合隶属系数最大化方法.....	50
4.1.2 特征权值方法.....	53
4.2 基于聚类的二型三角模糊多准则决策方法.....	55
4.2.1 问题描述.....	55
4.2.2 决策步骤.....	55
4.2.3 算例分析.....	56
4.3 基于后悔理论的二型三角模糊多准则决策方法.....	60
4.3.1 问题描述.....	61
4.3.2 决策步骤.....	61
4.3.3 算例分析.....	63
4.4 基于理想点的二型三角模糊多准则决策方法.....	66
4.4.1 问题描述.....	66
4.4.2 决策步骤.....	66
4.4.3 算例分析.....	69
4.5 本章小结.....	71
第五章 基于二型三角模糊数的绿色供应商选择.....	72
5.1 绿色供应商选择决策指标体系.....	72
5.1.1 绿色供应商选择影响因素分析.....	72
5.1.2 决策准则的确立.....	74
5.2 基于二型三角模糊数的绿色供应商选择.....	76
5.2.1 基于 $ITT2OWA$ 算子的二型三角模糊多准则决策方法.....	79
5.2.2 基于聚类的二型三角模糊多准则决策方法.....	80
5.3 比较和分析.....	88
5.4 本章小结.....	93
结束语.....	94
参考文献.....	96
致谢.....	107
攻读学位期间主要研究成果.....	108

第一章 绪论

1.1 引言

1.1.1 研究背景

随着社会的发展，人们对决策信度和效度的要求越来越高，在决策过程中，由于现实问题的复杂性以及人类思维的模糊性，决策者很难或者根本不可能给出精确的决策信息，因而实际多准则决策问题常常伴随着很多不确定性，这使得原有的确定环境下的多准则决策模型和方法已难以满足实际决策的需要，为了解决这一问题，不确定环境下的多准则决策方法逐渐成为研究的热点。

不确定多准则决策方法着眼于研究信息的不完全性以及决策者的主观性等因素。其中，模糊多准则决策方法占有非常重要的地位。在模糊多准则决策方法中，决策者给出的信息可以是区间数、三角模糊数、梯形模糊数或语言数等形式，利用这些形式的模糊数可以相对准确地刻画决策中的模糊性，使得决策结果更加客观有效。

在模糊多准则决策中，隶属度反映了决策者的确定程度，但是隶属度同样难以以精确数的形式给出，而用模糊集来表示更为恰当。隶属度为模糊数的模糊集称为二型模糊集^[1]。于是，本文称隶属度为模糊集(或模糊数)的模糊数为二型模糊数。关于这方面已经有很多研究^[2-4]，并已广泛的应用于模糊多准则决策问题中^[5,6]。

然而，现有研究大多针对于隶属度为离散值或区间数的二型模糊集(数)^[7]。这样的隶属度常常不能完全反映决策者的确定程度。例如，某决策者认为他的确定程度(隶属度)是“大约在 0.5 左右，至少 0.4，最多 0.6”，显然，使用离散的集合 {0.4,0.5,0.6} 或区间 [0.4,0.6] 都是不完善的，而使用三角模糊数来表示这一连续的隶属度更合适。本文称这类二型模糊数为二型三角模糊数。

在绿色供应商选择问题中，存在一些无法定量计算的准则，这些准则值的隶属度是不确定的，很难用精确的数字来衡量，也难以用传统模糊数的形式给出，否则会造成信息的扭曲。目前，还缺少有效的方法来处理这一问题，一个可行的想法是用语言值来处理这类定性准则，本文即采用这一方法。将语言值转化为模

模糊集(数)是常见的处理语言决策的方法^[8-10]，但是满足绿色供应商选择问题的双语言数^[11]所对应的模糊集(数)还没有定义，双语言数包含两重不确定性：准则值的不确定性和确定度的不确定性，以前的模糊集(数)无法表示这类模糊语言，而二型模糊集(数)则可以表示，其中，隶属函数表示评价的不确定性，次隶属函数表示确定程度的不确定性。于是本文提出二型三角模糊数这一定义。这种模糊数现在还没有研究，文献中也没有关于这类模糊集(数)的运算规则或算子，因此需要首先深入探索二型三角模糊数的相关定义和信息集成方法，然后研究利用二型三角模糊数处理类似于绿色供应商选择问题等定性问题的多准则决策方法，最后用二型三角模糊数来解决绿色供应商选择问题。该研究将会在已有基础上进一步地完善模糊多准则决策方法，具有深远的意义。

本研究来源于导师已申请的国家自然科学基金项目“基于直觉模糊数的随机多准则决策方法及其在应急处理方案评价与选择中的应用研究”，同时来源于中南大学商学院陈晓红教授主持的国家自然科学基金委“复杂环境下不确定性决策的理论与应用研究”创新群体研究项目，在已有研究的基础上，对二型三角模糊多准则决策方法进行一定的探索，进一步地完善模糊多准则决策方法。

1.1.2 研究目的及意义

(1)研究目的

针对准则值难以定量计算的多准则决策问题，提出基于二型三角模糊信息的多准则决策方法。在定义二型三角模糊数的相关概念和运算规则的基础上，提出二型三角模糊信息集结方法和相应的二型三角模糊决策方法，进而研究二型三角模糊数在绿色供应商选择问题中的应用。

(2)研究意义

在模糊决策实践中发现，社会经济生活中存在一类常见的决策问题，这类问题存在定性准则，很难定量计算，也就暗含着这类问题由于受到多种因素的制约，使得决策者难以精确知道自己的确定程度。普通的模糊决策方法实际上暗含了决策者是完全确定自己判断的正确程度的，但实际上这对于决策者来说常常难以达到。因此普通的模糊决策方法已经不能满足决策需求，新的模糊决策方法亟待提出。同样，在多准则决策环境下，有许多问题也满足这一特点，对于这类问题，目前尚缺少有效的决策方法，本文拟对这种模糊多准则决策问题加以研究。

本文研究发现，二型三角模糊数恰好能克服上述不足，有效的表示决策者的确定程度，其传统三角模糊数部分是决策信息，隶属度部分的三角模糊数是决策者对自己所给出的决策信息的确定程度。因此利用二型三角模糊数来处理这类问题能具有信息表述上的优势，而对此类决策问题未见相关研究的报导。

因此,研究处理绿色供应商选择问题的二型三角模糊数以及它的信息集成方法和决策模型,进而研究基于二型三角模糊数的多准则决策方法,解决诸如绿色供应商选择问题等定性问题,能很好的弥补现有研究的缺陷,具有重要的理论意义和实践价值。

1.2 国内外研究现状

1.2.1 模糊多准则决策研究现状

多准则决策最早起源于 Pareto 最优概念,80 年代初, Hwang 和 Yoon 出版了第一本著作^[12]。目前,多准则决策发展的越来越完善。

随着多准则决策的发展,研究逐渐陷入一个难题:由于决策者对问题认识的局限性或者自身知识缺乏等原因,决策者并不能完全知道多准则决策问题所需要的全部信息,决策存在着不确定性。随着社会节奏不断加快,人们越来越需要在信息尚未完全确定时就做出决策,而与之相对的是对决策信度和效度的要求也越来越高,因此这类不确定多准则决策问题亟待研究。

目前,国内外众多学者对不确定决策进行了研究,深入研究后,将不确定多准则决策问题进一步细化为三个分支:模糊多准则决策、随机多准则决策、灰色多准则决策。作为其中相当重要的一部分——模糊多准则决策是当前研究的热点,在实际决策中也有着非常广泛的应用。

模糊多准则决策是上世纪七十年代兴起的一个研究领域,1965 年, Zadeh^[13]提出了模糊集理论,这一理论在 1970 年被 Bellman 和 Zadeh^[14]用于多准则决策,模糊多准则决策就此诞生并在以后的研究中取得了众多研究成果:李荣钧^[15]详细地介绍了模糊多准则决策方法;徐泽水^[16]提出了基于期望值的模糊多属性决策方法; Wang 等^[17]提出了基于方案模糊偏好信息的多属性决策方法; Yang 等^[18]提出了基于证据推理的模糊多准则决策方法;陈晓红等^[19]提出了基于三角模糊数的多属性群决策方法,用以解决含有模糊语言信息的多属性群决策问题。

随着研究的进一步深入,人们发现模糊集也存在局限性,譬如,它只能反映决策者对某一概念的支持信息,不能反映反对信息,或者人们存在犹豫的情况。在此背景下, Atanassov^[20]于 1986 年第一次提出直觉模糊集,在传统模糊集隶属度的基础上,引入非隶属度、犹豫度的概念,可以更为细腻的刻画客观世界的模糊本质。随后,有很多学者将其用于多准则决策领域,如徐泽水等^[21, 22]定义并利用了直觉模糊信息集成算子处理多准则决策问题; Boran 等^[23]给出了基于直觉模糊集的多准则群决策方法;陈晓红等^[24]在研究复杂大群体决策方法时,将直觉模

糊积分算子应用于多属性群决策方法中；Feng 等^[25]将灰色关联方法应用于基于直觉模糊集的多属性决策方法中。

另一方面，也有一些学者从模糊集的论域方面进行扩展，得到具有连续隶属度函数的凸有界模糊集，称为模糊数^[15]。在模糊多准则决策中，运用模糊数表示准则值和权重值，能更有效的表示决策信息，因此，该概念提出后，众多学者开始研究基于模糊数的多准则决策问题。王坚强^[26]综述了模糊多准则决策，介绍了基于模糊数、直觉模糊集和 Vague 集的多准则决策方法和语言多准则决策方法的研究现状，并探讨了目前模糊多准则决策要解决的问题和发展方向；Hejazi 等^[27]使用模糊数进行模糊风险分析；Kuo 等^[28]使用三角模糊数来描述模糊信息，并对其进行集结从而解决多准则决策问题；Nezhad 等^[29]论述了其他模糊数都是梯形模糊数的特例，并将梯形模糊数与 TOPSIS 方法结合来解决多准则决策问题。

在此期间，研究人员发现直觉模糊集也同样存在局限性，为了进一步刻画模糊性，有学者尝试将直觉模糊集中的隶属度与非隶属度用模糊数来表示。对于这类扩展，在多准则决策领域，当前针对Atanassov等^[30]提出的区间直觉模糊集（即用区间数表示直觉模糊集中的隶属度与非隶属度）进行的理论与应用研究较多^[31, 32]。此外，刘锋等^[33]研究了模糊数直觉模糊集，并讨论了它与直觉模糊集、区间直觉模糊集的关系。

对其进行扩展的另一种思路是有学者提出的直觉模糊数的概念^[34]。在多准则决策中，运用直觉模糊数表示准则值和权重值，能够更好的符合人类的思维习惯，因此，该概念提出后，在不确定多准则决策领域里引起了热烈的反响，相继定义了直觉三角模糊数^[35]、直觉梯形模糊数^[26]、直觉语言数^[36]等概念并展开了后续研究，如Li^[37]提出了一种新的直觉三角模糊数的排序方法以及其在多准则决策中的应用等。

1.2.2 二型模糊多准则决策研究现状

至此，直觉模糊多准则决策方法的研究已经比较成熟，直觉模糊多准则决策很好的描述了问题的模糊性和人们的犹豫度，应用日益广泛。研究中发现，直觉模糊集实际上也可看成采用一个区间来表示传统模糊集中的隶属度，但是这个区间范围的取值通常难以精确确定，当事物变得复杂的时候，精确的陈述就会失去其精确的内涵。这一需求产生了二型模糊集^[38-40]。二型模糊集的隶属度不像一型模糊集那样是一个精确数，而是 $[0,1]$ 内的一个模糊数，由于二型模糊集的边界是模糊的，所以当精确的隶属度(或隶属度区间)难以确定时，使用二型模糊集更为恰当，决策也更具有弹性。

二型模糊集的这一优势具有相当重要的价值，因此自从二型模糊集的概念提

出后, 众多学者对其展开了研究, Karnik 等^[41]研究了二型模糊集的集合运算法则; Wu 等^[42]提出了基于二型模糊数的基数、模糊性和方差等的定义, 得到了计算基数以及二型模糊数的方差和偏差度的公式; Nilesh 等^[43]定义了二型模糊集的质心和广义质心, 给出计算方法, 并重点阐述了高斯二型模糊集, 得到二型模糊集的精确定义程序, 以及质心和高斯二型模糊集的近似计算程序; Mendel 等^[44]论述了各种定理如不确定度、相似度等应用于二型模糊集时, 次隶属度的处理方法; Gera 等^[45]研究了二型推理应用的理论基础; Harding 等^[46]研究了一些二型模糊集真值的问题, 提出了确定方程式约束条件的运算法则; Zhou 等^[47]研究了权重为二型语言值的 OWA 算子; Hwang 等^[2]提出了基于 Sugeno 积分的二型模糊集的相似度、包含度和熵; Walker 等^[48]研究了二型模糊集中真值为非零函数的取大取小运算法则; Yang 等^[49]将二型模糊集中的相似度和包含度方法应用到了聚类分析中; Coupland 等^[50]给出了二型模糊集的一些逻辑运算; Aisbett 等^[4]分析了二型模糊集和多变量模型的关系。

上述对于二型模糊集的研究大多集中在基础理论研究领域, 这是因为相较于普通模糊集, 二型模糊集更加复杂和抽象, 为了使研究容易扩展, 一些学者对二型模糊集的简化情形——区间二型模糊集进行了研究, Mendel 等^[51-53]提出区间二型模糊集, 给出了区间二型模糊集的质心以及当区间二型模糊集对称时节约一半工作量的计算方法; Chen 等^[54]通过计算二型模糊集的隶属函数, 提出一种基于区间二型模糊集的推理方法; Zhai 等^[3]总结了区间二型模糊集的五种不确定性, 并给出了更精确地计算不确定度的方法; Jerry^[7]定义了一般二型模糊集和区间二型模糊集的区别, 并做出了详细的阐述; Greenfield 等^[55]研究了区间二型模糊集的去模糊化方法; Fard 等^[56]给出了基于 Weierstrass 定理的区间二型模糊神经网络。

这些成果使得二型模糊集在多准则决策领域的应用成为可能, 许多学者对此进行了尝试和钻研。Sevastjanov 等^[1]综合了二型模糊集和二级模糊集工具, 并将其用于解决模糊多准则决策问题, Liu^[57]提出了二型直觉模糊 Choquet 积分算子, 并用于多准则决策, Chen 等^[10, 58]等定义了区间二型模糊集的增加、减法和乘法运算规则, 给出区间二型模糊集的比较方法, 同时建立了基于区间二型模糊信息的 TOPSIS 模型, 并用于处理多准则群决策问题, 使得处理模糊多准则决策更灵活、更智能化。

随着研究的深入, 人们逐渐发现二型模糊多准则决策在某些方面具有更大的优势, 因此二型模糊多准则决策得到了更深一步的发展。Wu 等^[59, 60]提出了一个语言近似向量相似性度量方法, 用向量的两个分量分别来测量形状和相似性, 随后其又提出一项新的排名方法和一种新的对二型模糊集的相似性度量方法, 在

处理语言不确定性和调查设计方面取得了一定的成果；Akay 等^[61]结合模糊信息公理和二型模糊集，将决策者在决策过程中的态度考虑进去，通过使用有序加权几何平均算子，提出了一种新的方案选择方法；Choi 等^[62]提出了三个新的区间二型模糊隶属函数的生成方法，并用反向传播神经网络对该方法进行评估，显示了决策的有效性；Qin 等^[6]提出了减少二型模糊变量的三个新方法，介绍了三种模糊变量的临界值，适用于数据包络分析与二型模糊的投入产出模型，同时开发了一个广义信誉 DEA 模型。

虽然目前对于二型模糊多准则决策问题的研究已经取得了众多成果，但这些成果仍倾向于集中在抽象的理论表述上，使得这一决策方法在实际应用上的发展受到限制，较有参考价值的应用研究尚很少见，如 Li 等^[63]使用二型模糊数学模型模拟并分析了生态系统的动态行为；Dereli 等^[5]综述了二型模糊集在工业方面的应用。

为了弥补这一缺陷，尽可能多的包含决策信息，本文认为利用二型三角模糊数来反应决策信息更为恰当：决策者以传统三角模糊数的形式给出决策信息，并以三角模糊数的形式给出自己对决策信息的确定程度，形成基于二型三角模糊数的多准则决策方法。这一方式有效的表示了问题的模糊性，而这样的研究目前还没有相关报导。

此外，为了使模糊多准则决策问题能够充分的模拟现实环境，许多学者考虑了信息不完全(主要是权重信息不完全)情况下的模糊多准则决策问题。徐泽水^[64]提出了权系数不完全且偏好信息为三角模糊数的多属性决策方法，给出了模糊数在信息不完全领域的应用，但是如果不考虑主观偏好值，该方法将失效，同时未考虑群体决策的情况；针对属性权重未知而属性值为三角模糊数的决策问题，杨静等^[65]提出了一种基于线性规划和投影技术的决策方法；针对偏好信息不完全的模糊多准则决策问题，Wang^[66]给出了决策方法与模型；针对专家偏好信息为区间数的多属性群决策问题，陈晓红等^[67]提出了确定专家客观权重与专家综合权重的方法并利用自适应迭代算法实现；针对准则权系数和决策者权系数信息都不完全、准则值为模糊数的多准则群决策问题，王坚强^[68]提出了信息不完全的 UTA 方法。

这类问题在二型模糊多准则决策领域同样具有不可轻视的地位，目前在模糊多准则决策问题中，先后有学者提出了最小平方法^[69]、变异系数法^[70]、离差最大化法^[71]、熵信息法^[72-75]、灰色关联度法^[28, 76]、目标规划法^[77, 78]等方法，不同的研究提供了多种方法以适应不同的需要，但是现有的研究大多针对于模糊集，不能精确刻画现实世界的模糊性，同时，预测准则权重实际上是一个多目标的问题，而目前存在的方法都是单一目标的，在决策精度要求较高时这些方法显得粗

糙。二型三角模糊数相较于普通模糊数多了主隶属度、次隶属度的概念，目前尚没有针对隶属度和次隶属度信息来解决信息缺失的研究。

1.2.3 绿色供应商选择研究现状

供应商选择问题关系到企业的生存和发展，供应商的形象直接影响着企业，优秀的供应商有助于企业的成功，因此供应商选择问题向来被学者所重视^[79-81]。Wang 等^[82]提出基于欧几里德距离的多层 TOPSIS 模型，并以此来选择供应商；Onut 等^[83]使用模糊 AHP 和模糊 TOPSIS 来处理长期供应商选择问题；Boran 等^[23]给出一种用来解决供应商选择问题的直觉模糊多准则群决策方法；Degraeve 等^[84]从所有权总成本角度提出了评估供应商的选择方法；Weber 等^[85]，De Boer 等^[86]和 Ho 等^[87]先后综述了供应商评价和选择的方法。

为了适应社会的变化，在发展经济的同时保护好生态环境，各国政府相继出台相关政策严格限制产品中有害物质的使用。环境方面的限制使企业的传统运营方式发生了巨大变化。供应商选择中的环境绩效问题也逐渐被考虑进来。研究发现，供应商的环境绩效对供应商影响深远。Wong 等^[88]研究了绿色运营和供应商的环境管理能力对制造业绩效的影响。Large 等^[89]以德国为例，研究了绿色供应链管理绩效的驱动。从适应环境、利用环境和保护环境的角度来看，研究绿色供应商选择问题成为一种必然的选择。

早在 1996 年，学者就已经意识到了环境绩效对供应链选择问题的影响。为了综合考虑供应链中环境因素带来的影响，充分优化和利用资源，使整个供应链对环境的负面影响最小、资源利用效率最高^[90]，很多学者尝试研究绿色供应链问题；Yeh 等^[91]用多目标遗传算法解决绿色供应链中选择合伙人的问题；Tseng^[92]研究了含有语言偏好信息和不完全信息的绿色供应链管理问题；Shang 等^[93]研究了台湾省电子制造业的相关公司中，绿色供应链管理能力的分类法；Sheu^[94]研究了政府金融干预下，竞争性的绿色供应链的交易模型；Lin^[95]用模糊 DEMATEL 方法来评价绿色供应链管理实务；Hsu 等^[96]研究了绿色供应链中供应商选择的模型。

绿色供应链中涉及的最重要的部分之一就是供应商，绿色供应商是绿色供应链管理的直接产物。绿色供应商选择问题的形成与发展并不是对传统供应商选择方法的否定，而是随着社会环境和经济环境的变化，对传统供应商选择方法的丰富和发展，它体现了供应商选择的发展方向。同时，将绿色供应商选择问题上升到理论高度，深入探讨绿色供应商选择方法，对指导和推动我国供应商选择实践也具有深远意义。

绿色供应商选择的特点表现为具有明显的环境友好性，更注重和供应商保持

长期、持续的合作和发展战略，是一种更全面性、综合性的供应商选择机制。绿色供应商具有提升企业社会责任形象等优势，受到了广泛欢迎，于是如何评价供应商的环境绩效成为研究热点并取得了相关的成果。Tuzkaya 等^[97]提出一种混合模糊多准则决策方法来评价供应商的环境绩效；Awasthi 等^[98]提出了评价供应商环境绩效的模糊多准则方法；Chiou 等^[99]研究了台湾省的供应商提高环境绩效，进行绿色创新的影响力和竞争优势；Fu 等^[100]给出远程通信系统中，供应商绿色发展项目的评价方法。

然而，上述研究都只能适用于特定的情况，缺乏通用性，也没有被广泛接受，这是因为供应商的环境绩效完全是一个定性的概念，环境因素复杂而抽象，很难定量研究，且不同地域的环境因素也各不相同，这使得评价供应商的环境绩效变得很困难。许多学者尝试着借助现代的研究工具来研究绿色供应商的选择问题。Bai 等^[101, 102]借助灰色理论和粗糙集方法将可持续发展整合到供应商选择问题中；Lee 等^[103]使用 Delphi 法和扩展的层次分析法给出高科技产业的绿色供应商选择模型；Büyüközkan 等^[104]提出了基于模糊 DEMATEL 方法、模糊 ANP 方法和模糊 TOPSIS 方法的混合多准则决策方法；Kuo 等^[105]将人工神经网络应用于绿色供应商选择问题中；Tsai 等^[106]结合动态决策研究了动态选择供应商的方法；Shaw 等^[107]综合利用模糊 AHP 和模糊多目标线性规划方法研究发展低碳供应链的供应商选择方法。

从绿色供应商选择的发展过程和特点来看，它的体系内容是围绕着选择合适的供应商，从而提高产品的竞争力和安全性而展开的。这些研究为重新审视供应商选择问题提供了崭新的视角。从适应环境、利用环境和保护环境的角度来看，研究供应商选择问题中的环境绩效评估问题成为了必然的趋势。此外，绿色供应商选择的理论研究与实践活动开展的时间都还很短暂，近几年才逐渐成为研究热点，其环境绩效评估方法成果尚少，因此有必要进一步加强绿色供应商选择理论与方法的研究，深入探讨其环境绩效评估方法，从而建立符合供应商选择理论发展规律的方法和体系，以便更好地应用于实践中。

然而有关供应商环境绩效评估方面的研究依然非常有限，这主要是因为专家并不确定自己对定性概念做出的判断有多高的正确率，与此同时，确定程度也很难用精确的数字来衡量。本文在研究中发现，用双语言数这一形式来描述决策信息恰好能解决这种问题，同时，将双语言数转化为二型三角模糊数可以使其具有良好的数学性质，有利于计算和信息集结。因此本文首先研究二型三角模糊数的数学性质和集结方式，进而使用基于二型三角模糊数的多准则决策方法来评价绿色供应商的环境绩效，有利于更有效的选择出最合适的绿色供应商，解决相应决策问题。

1.3 研究内容和论文结构

1.3.1 主要研究内容

本文定义了二型三角模糊数的相关概念、运算规则，给出了信息集成方法，进而研究了基于二型三角模糊数的多准则决策方法，并尝试将其应用在绿色供应商选择问题中。具体的研究内容按章简介如下：

第 1 章为导论。主要介绍本文的研究背景和研究目的及意义，综述了模糊多准则决策研究现状、二型模糊多准则决策研究现状和绿色供应商选择研究现状，通过对研究现状的分析，指出了本文的主要研究内容，并简要说明了各章之间的逻辑结构。

第 2 章为理论基础。详细地介绍了为完成本文的研究所需要的理论，包括三个方面：首先是现有二型模糊集的定义、运算规则和质心；其次，以二型模糊集的相关定义为基础，给出了二型三角模糊数的定义、隶属度函数、可能度公式、距离公式等相关概念，以及二型三角模糊数的运算规则；最后介绍了常见的权重确定方法。

第 3 章针对不同的信息集成需求，提出相应的二型三角模糊数的信息集成方法。其中，和性二型三角模糊集结算子如二型三角模糊加权算术平均算子、二型三角模糊有序加权平均算子、二型三角模糊诱导有序加权平均算子等；积性二型三角模糊集结算子如二型三角模糊加权几何平均算子、二型三角模糊有序加权几何平均算子等。给出使用相应算子进行集结的公式，进而给出使用算子来集结决策信息的方法。

第 4 章研究了基于二型三角模糊数的多准则决策方法，首先研究了权重未知时处理决策权重的方法：综合隶属系数最大化方法和特征权值方法。进而在第 3 章信息集成方法的基础上，利用决策模型，提出三种模糊多准则决策方法：基于聚类的二型三角模糊多准则决策方法，基于后悔理论的二型三角模糊多准则决策方法以及基于理想点的二型三角模糊多准则决策方法。

第 5 章研究了上述方法在绿色供应商选择问题中的应用，通过客观有效的分析决策环境，构建绿色供应商选择决策指标体系，建立了基于二型三角模糊数的绿色供应商选择方法，切实解决相应的决策问题。并在随后给出灵敏度分析，以看出权重变化对决策结果的影响。

最后是结束语。总结了本文的主要工作、成果，分析了尚需进一步研究的问题，并展望了二型三角模糊多准则决策方法的研究前景。

1.3.2 本文逻辑结构

本文的逻辑结构如图 1-1 所示：

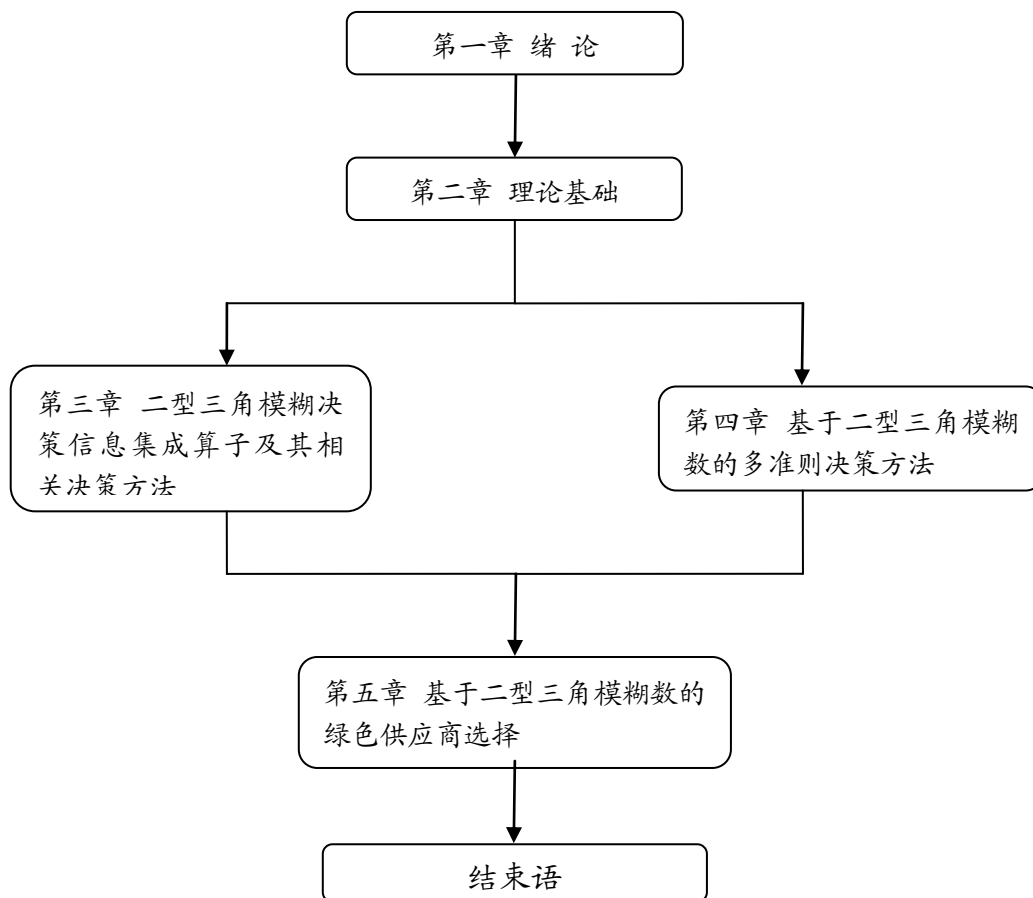


图 1-1 本文的逻辑结构

第二章 理论基础

本章是理论基础部分,介绍了文中所使用的主要理论和方法以及本文的主要研究对象。内容包括:二型模糊集理论、二型三角模糊数的相关定义和理论以及确定权重的一些方法和理论基础。

2.1 二型模糊集理论

二型模糊集是一型模糊集的扩展,一型模糊集的隶属度是 $[0,1]$ 区间内的一个实数,而二型模糊集的隶属度是一个一型模糊集^[108]。下面给出二型模糊集的定义:

2.1.1 二型模糊集定义

定义 2-1 论域 X 上的二型模糊集 A 的隶属度 u_A 为 $u_A : X \rightarrow [0,1]^J$, u_A 是 $[0,1]$ 内的一个模糊集(或 $[0,1]$ 内的子集 J)^[40]。二型模糊集 \tilde{a} 可以表示为:

$$\tilde{a} = \left\{ \left((x, u), \gamma_{\tilde{u}_x}(x, u) \right) \mid \forall x \in X, \forall u \in u_x \subseteq [0,1], 0 \leq \gamma_{\tilde{u}_x}(x, u) \leq 1 \right\} \quad (2-1)$$

其中, u_x 表示 X 中元素 x 属于 X 的隶属度,称为主隶属度, X 为给定论域, $\gamma_{\tilde{u}_x}(x, u)$ 表示 u_x 中元素 u 属于 u_x 的隶属度,称为次隶属度。

二型模糊集 \tilde{a} 还可以定义为:

$$\tilde{a} = \int_{x \in X} \int_{u \in u_x} \gamma_{\tilde{u}_x}(x, u) / (x, u) \quad (2-2)$$

特别地,如果 $\gamma_{\tilde{u}_x}(x, u) \equiv 1$, \tilde{a} 称为区间二型模糊集,此时, $\tilde{a} = \int_{x \in X} \int_{u \in u_x} 1 / (x, u)$ ^[44, 109]。

定义 2-2 实值函数 $S : F_2(X) \times F_2(X) \rightarrow [0,1]$ 称为二型模糊集的相似度, S 满足:

$$S1) S(\tilde{A}, \tilde{B}) = S(\tilde{B}, \tilde{A}), \forall \tilde{A}, \tilde{B} \in F_2(X);$$

$$S2) S(D, D^C) = 0, \forall D \in P(X) (X \text{ 的幂集})$$

$$S3) S(\tilde{E}, \tilde{E}) = \max_{\tilde{A}, \tilde{B} \in F_2(X)} S(\tilde{A}, \tilde{B}), \forall \tilde{E} \in F_2(X)$$

$$S4) \text{ 设 } \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C} \in F_2(X), \text{ 若 } \tilde{A} \subseteq \tilde{B} \subseteq \tilde{C}, \text{ 那么 } S(\tilde{A}, \tilde{B}) \geq S(\tilde{A}, \tilde{C}) \text{ 且 } S(\tilde{B}, \tilde{C}) \geq S(\tilde{A}, \tilde{C}).$$

定义 2-3 二型模糊集的相似度为^[49]:

$$S_{YL}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{1}{\int_{x \in X} dx} \int_{x \in X} \frac{\int_{u \in J_x} \min\{u \cdot f_x(u), u \cdot g_x(u)\} du}{\int_{u \in J_x} \max\{u \cdot f_x(u), u \cdot g_x(u)\} du} dx \quad (2-3)$$

定义 2-4 实函数 $E: F_2(X) \rightarrow R^+$ 被称为二型模糊集的熵, E 具有以下性质:

E1) 如果 D 是精确数集合, 那么 $E(D) = 0$;

E2) $E(\tilde{A}) = E(\tilde{A}^c), \forall \tilde{A} \in F_2(X)$;

E3) 当 $\tilde{A} = [\frac{1}{2}]$ 时, $E(\tilde{A})$ 取得最大值;

E4) 如果 \tilde{A} 比 \tilde{B} 更精确, 那么 $E(\tilde{A}) \leq E(\tilde{B})$.

2.1.2 二型模糊集的运算规则

定义 2-5 设 \tilde{a} 和 \tilde{b} 为两个二型模糊集, $\mu_{\tilde{a}}$ 和 $\mu_{\tilde{b}}$ 分别为其隶属度, 对任意 x , $\mu_{\tilde{a}}(x) = \int_{\mu} f_x(\mu) / \mu$, $\mu_{\tilde{b}}(x) = \int_w g_x(w) / w$, $\mu, w \in J_x$ 是 x 的主隶属度, $f_x(\mu) \in [0,1]$ 和 $g_x(w) \in [0,1]$ 为其次隶属度, 根据 Zadeh 的扩展原理^[38, 108, 110], 二型模糊集 \tilde{a} 和 \tilde{b} 的隶属度的并、交、补运算如下^[40, 41]:

$$\text{并: } \tilde{a} \cup \tilde{b} \Leftrightarrow \mu_{\tilde{a} \cup \tilde{b}}(x) = \mu_{\tilde{a}}(x) \cup \mu_{\tilde{b}}(x) = \int_{\mu} \int_w (f_x(\mu) * g_x(w)) / (\mu \vee w) \quad (2-4)$$

$$\text{交: } \tilde{a} \cap \tilde{b} \Leftrightarrow \mu_{\tilde{a} \cap \tilde{b}}(x) = \mu_{\tilde{a}}(x) \cap \mu_{\tilde{b}}(x) = \int_{\mu} \int_w (f_x(\mu) * g_x(w)) / (\mu * w) \quad (2-5)$$

$$\text{补: } \bar{\tilde{a}} \Leftrightarrow \mu_{\bar{\tilde{a}}}(x) = \neg \mu_{\tilde{a}}(x) = \int_{\mu} f_x(\mu) / (1 - \mu) \quad (2-6)$$

2.1.3 二型模糊集的质心

定义 2-6 根据一型模糊集的质心, Karnik 和 Mendel 给出二型模糊集质心的定义^[43]:

论域 X 中的二型模糊集 $\tilde{a} = \{(x, \mu_{\tilde{a}}(x)) | x \in X\}$, 将论域 X 离散化为 n 个点, 那么二型模糊集 $\tilde{a} = \{(x, \mu_{\tilde{a}}(x)) | x \in X\}$ 可以转化为 $\tilde{a} = \sum_{i=1}^n [\int_{\mu \in J_{x_i}} f_{x_i}(\mu) / \mu] / x_i$ 。

\tilde{a} 的质心 $C_{\tilde{a}}$ 可以定义为以下形式:

$$C_{\tilde{a}} = \int_{\theta_1 \in J_{x_1}} \cdots \int_{\theta_n \in J_{x_n}} [f_{x_1}(\theta_1) \otimes \cdots \otimes f_{x_n}(\theta_n)] / \frac{\sum_{i=1}^n x_i \theta_i}{\sum_{i=1}^n \theta_i} \quad (2-7)$$

质心 $C_{\tilde{a}}$ 是一个一型模糊集。

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = [\mu^L(x), \mu^M(x), \mu^R(x)] = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}[\mu^L, \mu^M, \mu^R], & a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b}[\mu^L, \mu^M, \mu^R], & b < x \leq c \\ 0, & \text{others} \end{cases} \quad (2-11)$$

次隶属度函数为

$$\gamma_{\tilde{a}(x)}(\mu) = \begin{cases} \frac{\mu - \mu^L(x)}{\mu^M(x) - \mu^L(x)}, & \mu^L(x) \leq \mu \leq \mu^M(x) \\ \frac{\mu^R(x) - \mu}{\mu^R(x) - \mu^M(x)}, & \mu^M(x) < \mu \leq \mu^R(x) \\ 0, & \text{others} \end{cases} \quad (2-12)$$

其中 $0 \leq \mu^L(x) \leq \mu^M(x) \leq \mu^R(x) \leq 1$, $0 \leq \gamma_{\tilde{a}(x)} \leq 1$ 。

某元素 x 所对应的主隶属度与次隶属度示意图如图 2-2 所示, x' 类似:

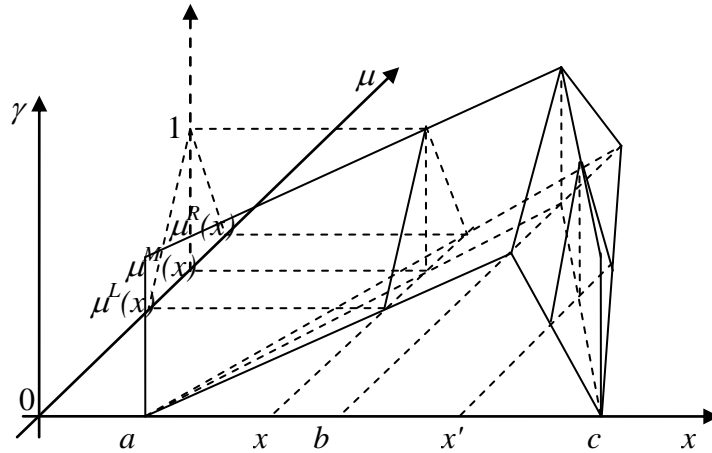


图 2-2 元素 x 和 x' 的主隶属度与次隶属度示意图

定义 2-8 如果 $\tilde{a} = \langle [a, b, c]; [\mu^L, \mu^M, \mu^R] \rangle$ 是一个二型三角模糊数且 $a \geq 0$, 那么 \tilde{a} 被称为正的二型三角模糊数(PTT2FN)。

定义 2-9^[11] 论域 X 中的双语言集 \hat{B} 形式如下:

$$\hat{B} = \{(x, \langle s_{\theta(x)}, h_{\sigma(x)} \rangle) \mid x \in X\},$$

其中

$$s_{\theta} : X \rightarrow S, \quad x \mapsto s_{\theta(x)} \in S,$$

$$h_{\sigma} : X \rightarrow H, \quad x \mapsto h_{\sigma(x)} \in H.$$

S 和 H 是两个有序语言集, $h_{\sigma(x)}$ 是元素 $x \in X$ 对于 $s_{\theta(x)}$ 的语言隶属度. 双语语言集 \widehat{B} 也可以定义为:

$$\widehat{B} = \{ \langle s_{\theta(x)}, h_{\sigma(x)} \rangle \mid x \in X \}$$

如果只有一个元素 x , 可以缩写为 $\widehat{B} = \langle s_{\theta(x)}, h_{\sigma(x)} \rangle$.

双语语言集 $\widehat{B} = \langle s_{\theta(x)}, h_{\sigma(x)} \rangle$ 可以表示为二型三角模糊数.

2.2.2 二型三角模糊数运算规则

在模糊数运算规则的基础上, 本文提出二型三角模糊数运算规则:

定义 2-10 设 $\tilde{a}_1 = \langle [a_1, b_1, c_1]; [\mu_1^L, \mu_1^M, \mu_1^R] \rangle$ 和 $\tilde{a}_2 = \langle [a_2, b_2, c_2]; [\mu_2^L, \mu_2^M, \mu_2^R] \rangle$

为两个二型三角模糊数, $\|\tilde{a}_i\| = \frac{a_i + 2b_i + c_i}{4}, a_i \geq 0, \mu_i^R \leq 1 (i=1, 2)$, 则有:

(1)

$$\tilde{a}_1 + \tilde{a}_2 = \langle [a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2]; \left[\frac{\|\tilde{a}_1\| \mu_1^L + \|\tilde{a}_2\| \mu_2^L}{\|\tilde{a}_1\| + \|\tilde{a}_2\|}, \frac{\|\tilde{a}_1\| \mu_1^M + \|\tilde{a}_2\| \mu_2^M}{\|\tilde{a}_1\| + \|\tilde{a}_2\|}, \frac{\|\tilde{a}_1\| \mu_1^R + \|\tilde{a}_2\| \mu_2^R}{\|\tilde{a}_1\| + \|\tilde{a}_2\|} \right] \rangle \quad (2-13)$$

(2)

$$\tilde{a}_1 - \tilde{a}_2 = \langle [a_1 - a_2, b_1 - b_2, c_1 - a_2]; \left[\frac{\|\tilde{a}_1\| \mu_1^L + \|\tilde{a}_2\| \mu_2^L}{\|\tilde{a}_1\| + \|\tilde{a}_2\|}, \frac{\|\tilde{a}_1\| \mu_1^M + \|\tilde{a}_2\| \mu_2^M}{\|\tilde{a}_1\| + \|\tilde{a}_2\|}, \frac{\|\tilde{a}_1\| \mu_1^R + \|\tilde{a}_2\| \mu_2^R}{\|\tilde{a}_1\| + \|\tilde{a}_2\|} \right] \rangle \quad (2-14)$$

$$(3) \tilde{a}_1 \cdot \tilde{a}_2 = \langle [a_1 a_2, b_1 b_2, c_1 c_2]; [\mu_1^L \mu_2^L, \mu_1^M \mu_2^M, \mu_1^R \mu_2^R] \rangle \quad (2-15)$$

$$(4) \frac{\tilde{a}_1}{\tilde{a}_2} = \langle \left[\frac{a_1}{c_2}, \frac{b_1}{b_2}, \frac{c_1}{a_2} \right]; [\mu_1^L \mu_2^L, \mu_1^M \mu_2^M, \mu_1^R \mu_2^R] \rangle \quad (2-16)$$

$$(5) \lambda \tilde{a}_1 = \langle [\lambda a_1, \lambda b_1, \lambda c_1]; [\mu_1^L, \mu_1^M, \mu_1^R] \rangle \quad (\lambda \geq 0) \quad (2-17)$$

$$(6) \tilde{a}_1^\lambda = \langle [a_1^\lambda, b_1^\lambda, c_1^\lambda]; [(\mu_1^L)^\lambda, (\mu_1^M)^\lambda, (\mu_1^R)^\lambda] \rangle \quad (\lambda \geq 0) \quad (2-18)$$

特别的, 当 $\|\tilde{a}_1\| = \|\tilde{a}_2\| = 0$ 时, $\mu_{\tilde{a}_1 + \tilde{a}_2} = \frac{\mu_{\tilde{a}_1} + \mu_{\tilde{a}_2}}{2}, \gamma_{\tilde{a}_1 + \tilde{a}_2} = \frac{\gamma_{\tilde{a}_1} + \gamma_{\tilde{a}_2}}{2}$.

例 2-1 设 $\tilde{a}_1 = \langle [7, 9, 10]; [0.3, 0.5, 0.7] \rangle$ 和 $\tilde{a}_2 = \langle [5, 7, 9]; [0.7, 0.9, 1.0] \rangle$ 为两个二型三角模糊数, $\lambda = 3$, 那么, $\|\tilde{a}_1\| = 8.75, \|\tilde{a}_2\| = 7$, 由定义 2-4 知:

$$(1) \tilde{a}_1 + \tilde{a}_2 = \langle [12, 16, 19]; [0.48, 0.68, 0.83] \rangle;$$

$$(2) \tilde{a}_1 - \tilde{a}_2 = \langle [-2, 2, 5]; [0.48, 0.68, 0.83] \rangle;$$

$$(3) \tilde{a}_1 \cdot \tilde{a}_2 = \langle [35, 63, 90]; [0.21, 0.45, 0.7] \rangle;$$

$$(4) \tilde{a}_1 / \tilde{a}_2 = \langle [0.78, 1.29, 2]; [0.21, 0.45, 0.7] \rangle;$$

$$(5) \lambda \tilde{a}_1 = \langle [21, 27, 30]; [0.3, 0.5, 0.7] \rangle;$$

$$(6) \tilde{a}_1^\lambda = \langle [343, 729, 1000]; [0.03, 0.13, 0.34] \rangle.$$

性质 2-1 设 $\tilde{a}_i = \langle [a_i, b_i, c_i]; [\mu_i^L, \mu_i^M, \mu_i^R] \rangle$ ($i=1, 2, 3$) 为三个二型三角模糊数, $a_i \geq 0$, $\mu_i \leq 1$, ($i=1, 2, 3$), 则定义 2-4 中的算术运算满足以下性质:

$$(1) \tilde{a}_1 + \tilde{a}_2 = \tilde{a}_2 + \tilde{a}_1 \quad (2-19)$$

$$(2) (\tilde{a}_1 + \tilde{a}_2) + \tilde{a}_3 = \tilde{a}_1 + (\tilde{a}_2 + \tilde{a}_3) \quad (2-20)$$

$$(3) \tilde{a}_1 \cdot \tilde{a}_2 = \tilde{a}_2 \cdot \tilde{a}_1 \quad (2-21)$$

$$(4) (\tilde{a}_1 \cdot \tilde{a}_2) \cdot \tilde{a}_3 = \tilde{a}_1 \cdot (\tilde{a}_2 \cdot \tilde{a}_3) \quad (2-22)$$

$$(5) \lambda_1 \tilde{a}_1 + \lambda_2 \tilde{a}_1 = (\lambda_1 + \lambda_2) \tilde{a}_1, \quad (\lambda_1, \lambda_2 \geq 0) \quad (2-23)$$

$$(6) \lambda \tilde{a}_1 + \lambda \tilde{a}_2 = \lambda (\tilde{a}_1 + \tilde{a}_2), \quad (\lambda \geq 0) \quad (2-24)$$

证明: 性质(1)、(3)、(4)、(5)、(6)的证明过程在此省略, 以下给出性质(2)的证明。

因为 $a_i \geq 0$ ($i=1, 2, 3$), 由定义 2-4 的加法运算有:

$$\begin{aligned} & \tilde{a}_1 + \tilde{a}_2 = \\ & \langle [a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2]; \left[\frac{\|\tilde{a}_1\| \mu_1^L + \|\tilde{a}_2\| \mu_2^L}{\|\tilde{a}_1\| + \|\tilde{a}_2\|}, \frac{\|\tilde{a}_1\| \mu_1^M + \|\tilde{a}_2\| \mu_2^M}{\|\tilde{a}_1\| + \|\tilde{a}_2\|}, \frac{\|\tilde{a}_1\| \mu_1^R + \|\tilde{a}_2\| \mu_2^R}{\|\tilde{a}_1\| + \|\tilde{a}_2\|} \right] \rangle \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} & (\tilde{a}_1 + \tilde{a}_2) + \tilde{a}_3 = \\ & \langle [a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2]; \left[\frac{\|\tilde{a}_1\| \mu_1^L + \|\tilde{a}_2\| \mu_2^L}{\|\tilde{a}_1\| + \|\tilde{a}_2\|}, \frac{\|\tilde{a}_1\| \mu_1^M + \|\tilde{a}_2\| \mu_2^M}{\|\tilde{a}_1\| + \|\tilde{a}_2\|}, \frac{\|\tilde{a}_1\| \mu_1^R + \|\tilde{a}_2\| \mu_2^R}{\|\tilde{a}_1\| + \|\tilde{a}_2\|} \right] \rangle \\ & + \langle [a_3, b_3, c_3]; [\mu_3^L, \mu_3^M, \mu_3^R] \rangle \\ & = \langle [(a_1 + a_2) + a_3, (b_1 + b_2) + b_3, (c_1 + c_2) + c_3]; \\ & \quad \frac{a_1 + a_2 + c_1 + c_2 + 2b_1 + 2b_2}{4} \cdot \frac{\|\tilde{a}_1\| \mu_{\tilde{a}_1}^L + \|\tilde{a}_2\| \mu_{\tilde{a}_2}^L}{\|\tilde{a}_1\| + \|\tilde{a}_2\|} + \|\tilde{a}_3\| \mu_{\tilde{a}_3}^L, \\ & \quad \left[\frac{a_1 + a_2 + c_1 + c_2 + 2b_1 + 2b_2}{4} + \frac{a_3 + c_3 + 2b_3}{4} \right], \\ & \quad \frac{a_1 + a_2 + c_1 + c_2 + 2b_1 + 2b_2}{4} \cdot \frac{\|\tilde{a}_1\| \mu_{\tilde{a}_1}^M + \|\tilde{a}_2\| \mu_{\tilde{a}_2}^M}{\|\tilde{a}_1\| + \|\tilde{a}_2\|} + \|\tilde{a}_3\| \mu_{\tilde{a}_3}^M, \\ & \quad \frac{a_1 + a_2 + c_1 + c_2 + 2b_1 + 2b_2}{4} + \frac{a_3 + c_3 + 2b_3}{4} \rangle, \end{aligned}$$

$$\frac{a_1 + a_2 + c_1 + c_2 + 2b_1 + 2b_2}{4} \cdot \frac{\|\tilde{a}_1\| \mu_{\tilde{a}_1}^R + \|\tilde{a}_2\| \mu_{\tilde{a}_2}^R + \|\tilde{a}_3\| \mu_{\tilde{a}_3}^R}{\|\tilde{a}_1\| + \|\tilde{a}_2\|} + \frac{a_3 + c_3 + 2b_3}{4} >$$

$$\frac{a_1 + a_2 + c_1 + c_2 + 2b_1 + 2b_2}{4} + \frac{a_3 + c_3 + 2b_3}{4}$$

$$\Rightarrow \langle [a_1 + a_2 + a_3, b_1 + b_2 + b_3, c_1 + c_2 + c_3];$$

$$\left[\frac{\|\tilde{a}_1\| \mu_{\tilde{a}_1}^L + \|\tilde{a}_2\| \mu_{\tilde{a}_2}^L + \|\tilde{a}_3\| \mu_{\tilde{a}_3}^L}{\|\tilde{a}_1\| + \|\tilde{a}_2\| + \|\tilde{a}_3\|}, \frac{\|\tilde{a}_1\| \mu_{\tilde{a}_1}^M + \|\tilde{a}_2\| \mu_{\tilde{a}_2}^M + \|\tilde{a}_3\| \mu_{\tilde{a}_3}^M}{\|\tilde{a}_1\| + \|\tilde{a}_2\| + \|\tilde{a}_3\|}, \frac{\|\tilde{a}_1\| \mu_{\tilde{a}_1}^R + \|\tilde{a}_2\| \mu_{\tilde{a}_2}^R + \|\tilde{a}_3\| \mu_{\tilde{a}_3}^R}{\|\tilde{a}_1\| + \|\tilde{a}_2\| + \|\tilde{a}_3\|} \right] >$$

同样地,

$$\tilde{a}_1 + (\tilde{a}_2 + \tilde{a}_3) \Rightarrow \langle [a_1, b_1, c_1]; [\mu_1^L, \mu_1^M, \mu_1^R] \rangle +$$

$$\langle [a_2 + a_3, b_2 + b_3, c_2 + c_3]; \left[\frac{\|\tilde{a}_2\| \mu_{\tilde{a}_2}^L + \|\tilde{a}_3\| \mu_{\tilde{a}_3}^L}{\|\tilde{a}_2\| + \|\tilde{a}_3\|}, \frac{\|\tilde{a}_2\| \mu_{\tilde{a}_2}^M + \|\tilde{a}_3\| \mu_{\tilde{a}_3}^M}{\|\tilde{a}_2\| + \|\tilde{a}_3\|}, \frac{\|\tilde{a}_2\| \mu_{\tilde{a}_2}^R + \|\tilde{a}_3\| \mu_{\tilde{a}_3}^R}{\|\tilde{a}_2\| + \|\tilde{a}_3\|} \right] \rangle$$

$$\Rightarrow \langle [a_1 + (a_2 + a_3), b_1 + (b_2 + b_3), c_1 + (c_2 + c_3)];$$

$$\left[\frac{\|\tilde{a}_1\| \mu_{\tilde{a}_1}^L + \frac{a_2 + a_3 + c_2 + c_3 + 2b_2 + 2b_3}{4} \cdot \frac{\|\tilde{a}_2\| \mu_{\tilde{a}_2}^L + \|\tilde{a}_3\| \mu_{\tilde{a}_3}^L}{\|\tilde{a}_2\| + \|\tilde{a}_3\|}}{\frac{a_1 + c_1 + 2b_1}{4} + \frac{a_2 + a_3 + c_2 + c_3 + 2b_2 + 2b_3}{4}}, \right.$$

$$\frac{\|\tilde{a}_1\| \mu_{\tilde{a}_1}^M + \frac{a_2 + a_3 + c_2 + c_3 + 2b_2 + 2b_3}{4} \cdot \frac{\|\tilde{a}_2\| \mu_{\tilde{a}_2}^M + \|\tilde{a}_3\| \mu_{\tilde{a}_3}^M}{\|\tilde{a}_2\| + \|\tilde{a}_3\|}}{\frac{a_1 + c_1 + 2b_1}{4} + \frac{a_2 + a_3 + c_2 + c_3 + 2b_2 + 2b_3}{4}},$$

$$\left. \frac{\|\tilde{a}_1\| \mu_{\tilde{a}_1}^R + \frac{a_2 + a_3 + c_2 + c_3 + 2b_2 + 2b_3}{4} \cdot \frac{\|\tilde{a}_2\| \mu_{\tilde{a}_2}^R + \|\tilde{a}_3\| \mu_{\tilde{a}_3}^R}{\|\tilde{a}_2\| + \|\tilde{a}_3\|}}{\frac{a_1 + c_1 + 2b_1}{4} + \frac{a_2 + a_3 + c_2 + c_3 + 2b_2 + 2b_3}{4}} \right] >$$

$$\Rightarrow \langle [a_1 + a_2 + a_3, b_1 + b_2 + b_3, c_1 + c_2 + c_3];$$

$$\left[\frac{\|\tilde{a}_1\| \mu_{\tilde{a}_1}^L + \|\tilde{a}_2\| \mu_{\tilde{a}_2}^L + \|\tilde{a}_3\| \mu_{\tilde{a}_3}^L}{\|\tilde{a}_1\| + \|\tilde{a}_2\| + \|\tilde{a}_3\|}, \frac{\|\tilde{a}_1\| \mu_{\tilde{a}_1}^M + \|\tilde{a}_2\| \mu_{\tilde{a}_2}^M + \|\tilde{a}_3\| \mu_{\tilde{a}_3}^M}{\|\tilde{a}_1\| + \|\tilde{a}_2\| + \|\tilde{a}_3\|}, \frac{\|\tilde{a}_1\| \mu_{\tilde{a}_1}^R + \|\tilde{a}_2\| \mu_{\tilde{a}_2}^R + \|\tilde{a}_3\| \mu_{\tilde{a}_3}^R}{\|\tilde{a}_1\| + \|\tilde{a}_2\| + \|\tilde{a}_3\|} \right] >$$

所以 $(\tilde{a}_1 + \tilde{a}_2) + \tilde{a}_3 = \tilde{a}_1 + (\tilde{a}_2 + \tilde{a}_3)$, 性质(2)得证。

性质 2-2 当二型三角模糊数 $\tilde{a} = \langle [a, b, c]; [\mu^L, \mu^M, \mu^R] \rangle$ 退化为普通的三角模糊数 $\tilde{a} = [a, b, c]$ 时。运算规则即化为三角模糊数的运算, 如下:

$$(1) \tilde{a}_1 + \tilde{a}_2 = [a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2]$$

$$(2) \tilde{a}_1 - \tilde{a}_2 = [a_1 - a_2, b_1 - b_2, c_1 - c_2]$$

$$(3) \tilde{a}_1 \cdot \tilde{a}_2 = [a_1 a_2, b_1 b_2, c_1 c_2]$$

$$(4) \begin{matrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \end{matrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 \end{bmatrix}$$

$$(5) \lambda \tilde{a}_1 = [\lambda a_1, \lambda b_1, \lambda c_1] \quad (\lambda \geq 0)$$

$$(6) \tilde{a}_1^\lambda = [a_1^\lambda, b_1^\lambda, c_1^\lambda] \quad (\lambda \geq 0)$$

例 2-2 设 $\tilde{a}_1 = [7,9,10]$ 和 $\tilde{a}_2 = [5,7,9]$ 为两个三角模糊数, $\lambda = 3$, 那么由定义知:

$$(1) \tilde{a}_1 + \tilde{a}_2 = [12,16,19];$$

$$(2) \tilde{a}_1 - \tilde{a}_2 = [-2,2,5];$$

$$(3) \tilde{a}_1 \cdot \tilde{a}_2 = [35,63,90];$$

$$(4) \tilde{a}_1 / \tilde{a}_2 = [0.78,1.29,2];$$

$$(5) \lambda \tilde{a}_1 = [21,27,30];$$

$$(6) \tilde{a}_1^\lambda = [343,729,1000].$$

定理 2-1 n 个二型三角模糊数的和为:

$$\sum_{i=1}^n \tilde{a}_i = \left\langle \left[\sum_{i=1}^n a_i, \sum_{i=1}^n b_i, \sum_{i=1}^n c_i \right]; \left[\frac{\sum_{i=1}^n \|\tilde{a}_i\| \mu_{a_i}^L}{\sum_{i=1}^n \|\tilde{a}_i\|}, \frac{\sum_{i=1}^n \|\tilde{a}_i\| \mu_{a_i}^M}{\sum_{i=1}^n \|\tilde{a}_i\|}, \frac{\sum_{i=1}^n \|\tilde{a}_i\| \mu_{a_i}^R}{\sum_{i=1}^n \|\tilde{a}_i\|} \right] \right\rangle \quad (2-25)$$

证明: 下面用数学归纳法证明这个公式。

1) 当 $n = 2$ 时,

显然

$$\tilde{a}_1 + \tilde{a}_2 = \left\langle [a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2]; \left[\frac{\|\tilde{a}_1\| \mu_1^L + \|\tilde{a}_2\| \mu_2^L}{\|\tilde{a}_1\| + \|\tilde{a}_2\|}, \frac{\|\tilde{a}_1\| \mu_1^M + \|\tilde{a}_2\| \mu_2^M}{\|\tilde{a}_1\| + \|\tilde{a}_2\|}, \frac{\|\tilde{a}_1\| \mu_1^R + \|\tilde{a}_2\| \mu_2^R}{\|\tilde{a}_1\| + \|\tilde{a}_2\|} \right] \right\rangle$$

2) 假设当 $n = k$ 时, 公式(2-25)成立, 即

$$\sum_{i=1}^k \tilde{a}_i = \left\langle \left[\sum_{i=1}^k a_i, \sum_{i=1}^k b_i, \sum_{i=1}^k c_i \right]; \left[\frac{\sum_{i=1}^k \|\tilde{a}_i\| \mu_{a_i}^L}{\sum_{i=1}^k \|\tilde{a}_i\|}, \frac{\sum_{i=1}^k \|\tilde{a}_i\| \mu_{a_i}^M}{\sum_{i=1}^k \|\tilde{a}_i\|}, \frac{\sum_{i=1}^k \|\tilde{a}_i\| \mu_{a_i}^R}{\sum_{i=1}^k \|\tilde{a}_i\|} \right] \right\rangle$$

则当 $n = k + 1$ 时, 可得:

$$\sum_{i=1}^{k+1} \tilde{a}_i = \sum_{i=1}^k \tilde{a}_i + \tilde{a}_{k+1} =$$

$$\begin{aligned}
 & \langle [\sum_{i=1}^k a_i, \sum_{i=1}^k b_i, \sum_{i=1}^k c_i]; [\frac{\sum_{i=1}^k \|\tilde{a}_i\| \mu_{a_i}^L}{\sum_{i=1}^k \|\tilde{a}_i\|}, \frac{\sum_{i=1}^k \|\tilde{a}_i\| \mu_{a_i}^M}{\sum_{i=1}^k \|\tilde{a}_i\|}, \frac{\sum_{i=1}^k \|\tilde{a}_i\| \mu_{a_i}^R}{\sum_{i=1}^k \|\tilde{a}_i\|}] \rangle \\
 & + \langle [a_{k+1}, b_{k+1}, c_{k+1}]; [\mu_{\tilde{a}_{k+1}}^L, \mu_{\tilde{a}_{k+1}}^M, \mu_{\tilde{a}_{k+1}}^R] \rangle \\
 & = \langle [\sum_{i=1}^k a_i + a_{k+1}, \sum_{i=1}^k b_i + b_{k+1}, \sum_{i=1}^k c_i + c_{k+1}]; [\frac{\sum_{i=1}^k \frac{a_i + c_i + 2b_i}{4} \mu_{a_i}^L + \frac{a_{k+1} + c_{k+1} + 2b_{k+1}}{4} \mu_{a_{k+1}}^L}{\sum_{i=1}^k \frac{a_i + c_i + 2b_i}{4} + \frac{a_{k+1} + c_{k+1} + 2b_{k+1}}{4}}, \\
 & \frac{\sum_{i=1}^k \frac{a_i + c_i + 2b_i}{4} \mu_{a_i}^M + \frac{a_{k+1} + c_{k+1} + 2b_{k+1}}{4} \mu_{a_{k+1}}^M}{\sum_{i=1}^k \frac{a_i + c_i + 2b_i}{4} + \frac{a_{k+1} + c_{k+1} + 2b_{k+1}}{4}}, \frac{\sum_{i=1}^k \frac{a_i + c_i + 2b_i}{4} \mu_{a_i}^R + \frac{a_{k+1} + c_{k+1} + 2b_{k+1}}{4} \mu_{a_{k+1}}^R}{\sum_{i=1}^k \frac{a_i + c_i + 2b_i}{4} + \frac{a_{k+1} + c_{k+1} + 2b_{k+1}}{4}}] \rangle \\
 & = \langle [\sum_{i=1}^{k+1} a_i, \sum_{i=1}^{k+1} b_i, \sum_{i=1}^{k+1} c_i]; [\frac{\sum_{i=1}^{k+1} \frac{a_i + c_i + 2b_i}{4} \mu_{a_i}^L + \frac{a_{k+1} + c_{k+1} + 2b_{k+1}}{4} \mu_{a_{k+1}}^L}{\sum_{i=1}^{k+1} \frac{a_i + c_i + 2b_i}{4}}, \\
 & \frac{\sum_{i=1}^{k+1} \frac{a_i + c_i + 2b_i}{4} \mu_{a_i}^M + \frac{a_{k+1} + c_{k+1} + 2b_{k+1}}{4} \mu_{a_{k+1}}^M}{\sum_{i=1}^{k+1} \frac{a_i + c_i + 2b_i}{4}}, \frac{\sum_{i=1}^{k+1} \frac{a_i + c_i + 2b_i}{4} \mu_{a_i}^R + \frac{a_{k+1} + c_{k+1} + 2b_{k+1}}{4} \mu_{a_{k+1}}^R}{\sum_{i=1}^{k+1} \frac{a_i + c_i + 2b_i}{4}}] \rangle \\
 & = \langle [\sum_{i=1}^{k+1} a_i, \sum_{i=1}^{k+1} b_i, \sum_{i=1}^{k+1} c_i]; [\frac{\sum_{i=1}^{k+1} \|\tilde{a}_i\| \mu_{a_i}^L}{\sum_{i=1}^{k+1} \|\tilde{a}_i\|}, \frac{\sum_{i=1}^{k+1} \|\tilde{a}_i\| \mu_{a_i}^M}{\sum_{i=1}^{k+1} \|\tilde{a}_i\|}, \frac{\sum_{i=1}^{k+1} \|\tilde{a}_i\| \mu_{a_i}^R}{\sum_{i=1}^{k+1} \|\tilde{a}_i\|}] \rangle
 \end{aligned}$$

综合 1)和 2)可知, 对一切 $n \in N$, 公式(2-25)均成立。

2.2.3 二型三角模糊数的记分函数

由于现有的二型模糊比较方法都是基于二型模糊集的, 因此比较方法往往抽象复杂。在定义 2-4 的基础上, 本文给出二型模糊数的记分函数, 并用其进行比

较，简单直观。

定义 2-11 设二型三角模糊数 $\tilde{a} = \langle [a, b, c]; [\mu^L, \mu^M, \mu^R] \rangle$, $\mu^R \leq 1$, 则其记分函数为:

$$S(\tilde{a}) = (a + 2b + c) \times (\mu^L + 2\mu^M + \mu^R) \quad (2-26)$$

定义 2-12 设 \tilde{a}_1 和 \tilde{a}_2 为两个二型三角模糊数, 则有

(1) 若 $S(\tilde{a}_1) > S(\tilde{a}_2)$, 则 $\tilde{a}_1 > \tilde{a}_2$;

(2) 若 $S(\tilde{a}_1) = S(\tilde{a}_2)$, 则 $\tilde{a}_1 = \tilde{a}_2$.

例 2-3 二型三角模糊数 $\tilde{a}_1 = \langle [0.96, 2.59, 3.77]; [0.84, 0.96, 0.98] \rangle$, $\tilde{a}_2 = \langle [2.63, 4.22, 4.7]; [0.8, 0.92, 0.96] \rangle$, 那么 \tilde{a}_1 和 \tilde{a}_2 的记分函数分别是 $S(\tilde{a}_1) = 37$, $S(\tilde{a}_2) = 56.9$, 可见 $S(\tilde{a}_2) > S(\tilde{a}_1)$, 所以 $\tilde{a}_2 > \tilde{a}_1$ 。

2.2.4 二型三角模糊数的可能度公式

参考可能度公式^[111], 将区间数扩展到三角模糊数, 并加入隶属度的影响因素, 下面给出二型三角模糊数的可能度定义:

定义 2-13 设 $\tilde{a}_1 = \langle [a_1, b_1, c_1]; [\mu_1^L, \mu_1^M, \mu_1^R] \rangle$ 和 $\tilde{a}_2 = \langle [a_2, b_2, c_2]; [\mu_2^L, \mu_2^M, \mu_2^R] \rangle$ 为两个二型三角模糊数, $c_i \geq a_i \geq 0 (i=1, 2)$, 若 \tilde{a}_1 和 \tilde{a}_2 满足 $0.5 \leq P(\tilde{a}_1 \geq \tilde{a}_2) \leq 1$, 则称 $\tilde{a}_1 \geq \tilde{a}_2$, 否则 $\tilde{a}_1 < \tilde{a}_2$, 其中

$$P(\tilde{a}_1 \geq \tilde{a}_2) = \frac{\min\{l_1\mu_1 + l_2\mu_2, \max((b_1 + c_1)\mu_1 - (a_2 + b_2)\mu_2, 0)\}}{l_1\mu_1 + l_2\mu_2} \quad (2-27)$$

为 $\tilde{a}_1 \geq \tilde{a}_2$ 的可能度, $l_i = c_i - a_i$, $\mu_i = \frac{\mu_i^L + 2\mu_i^M + \mu_i^R}{4} (i=1, 2)$ 。

根据可能度公式进行两两比较, 可以给出 n 个二型三角模糊数的完全排序。

性质 2-3 可能度公式中 $0 \leq P(\tilde{a}_1 \geq \tilde{a}_2) \leq 1$, 且存在 $P(\tilde{a}_1 \geq \tilde{a}_1) = 0.5$ 。

证明: 显然 $0 \leq P(\tilde{a}_1 \geq \tilde{a}_2) \leq 1$,

$$\begin{aligned} P(\tilde{a}_1 \geq \tilde{a}_1) &= \frac{\min\{l_1\mu_1 + l_1\mu_1, \max((b_1 + c_1)\mu_1 - (a_1 + b_1)\mu_1, 0)\}}{l_1\mu_1 + l_1\mu_1} \\ &= \frac{\min\{l_1\mu_1 + l_1\mu_1, \max(\mu_1 l_1, 0)\}}{l_1\mu_1 + l_1\mu_1} = \frac{l_1\mu_1}{l_1\mu_1 + l_1\mu_1} = 0.5 \end{aligned}$$

性质 2-4 可能度公式中 $P(\tilde{a}_1 \geq \tilde{a}_2) + P(\tilde{a}_2 \geq \tilde{a}_1) = 1$ 。

证明:

$$P(\tilde{a}_1 \geq \tilde{a}_2) = \frac{\min\{l_1\mu_1 + l_2\mu_2, \max((b_1 + c_1)\mu_1 - (a_2 + b_2)\mu_2, 0)\}}{l_1\mu_1 + l_2\mu_2}$$

$$P(\tilde{a}_2 \geq \tilde{a}_1) = \frac{\min\{l_1\mu_1 + l_2\mu_2, \max((b_2 + c_2)\mu_2 - (a_1 + b_1)\mu_1, 0)\}}{l_1\mu_1 + l_2\mu_2}$$

1) 若 $(b_1 + c_1)\mu_1 \leq (a_2 + b_2)\mu_2$,

那么 $(a_1 + b_1)\mu_1 \leq (b_1 + c_1)\mu_1 \leq (a_2 + b_2)\mu_2 \leq (b_2 + c_2)\mu_2$,

$$P(\tilde{a}_1 \geq \tilde{a}_2) = 0,$$

$$\begin{aligned} P(\tilde{a}_2 \geq \tilde{a}_1) &= \frac{\min\{l_1\mu_1 + l_2\mu_2, (b_2 + c_2)\mu_2 - (a_1 + b_1)\mu_1\}}{l_1\mu_1 + l_2\mu_2} \\ &= \frac{\min\{(c_1 - a_1)\mu_1 + (c_2 - a_2)\mu_2, (b_2 + c_2)\mu_2 - (a_1 + b_1)\mu_1\}}{(c_1 - a_1)\mu_1 + (c_2 - a_2)\mu_2} \end{aligned}$$

因为

$$[(c_1 - a_1)\mu_1 + (c_2 - a_2)\mu_2] - [(b_2 + c_2)\mu_2 - (a_1 + b_1)\mu_1] = (\mu_1c_1 - \mu_2a_2) - (\mu_2b_2 - \mu_1b_1),$$

$$\text{又因为 } (\mu_1c_1 - \mu_2a_2) - (\mu_2b_2 - \mu_1b_1) = (b_1 + c_1)\mu_1 - (a_2 + b_2)\mu_2 \leq 0,$$

$$\text{所以 } \mu_1c_1 - \mu_2a_2 \leq \mu_2b_2 - \mu_1b_1,$$

$$\text{所以 } (c_1 - a_1)\mu_1 + (c_2 - a_2)\mu_2 \leq (b_2 + c_2)\mu_2 - (a_1 + b_1)\mu_1,$$

$$\text{即 } P(\tilde{a}_2 \geq \tilde{a}_1) = 1.$$

因此可证: $P(\tilde{a}_1 \geq \tilde{a}_2) + P(\tilde{a}_2 \geq \tilde{a}_1) = 1$ 。

2) 若 $(b_1 + c_1)\mu_1 > (a_2 + b_2)\mu_2$, $(b_2 + c_2)\mu_2 \leq (a_1 + b_1)\mu_1$, 证明等同情况 1。

3) 若 $(b_1 + c_1)\mu_1 > (a_2 + b_2)\mu_2$, $(b_2 + c_2)\mu_2 > (a_1 + b_1)\mu_1$,

$$\begin{aligned} P(\tilde{a}_1 \geq \tilde{a}_2) &= \frac{\min\{(c_1 - a_1)\mu_1 + (c_2 - a_2)\mu_2, (b_1 + c_1)\mu_1 - (a_2 + b_2)\mu_2\}}{(c_1 - a_1)\mu_1 + (c_2 - a_2)\mu_2} \\ &= \frac{\min\{c_1\mu_1 - a_1\mu_1 + c_2\mu_2 - a_2\mu_2, b_1\mu_1 + c_1\mu_1 - a_2\mu_2 - b_2\mu_2\}}{(c_1 - a_1)\mu_1 + (c_2 - a_2)\mu_2} \end{aligned}$$

$$\text{因为 } (c_1\mu_1 - a_1\mu_1 + c_2\mu_2 - a_2\mu_2) - (b_1\mu_1 + c_1\mu_1 - a_2\mu_2 - b_2\mu_2) = c_2\mu_2 - a_1\mu_1 - b_1\mu_1 + b_2\mu_2$$

$$\text{又因为 } c_2\mu_2 - a_1\mu_1 - b_1\mu_1 + b_2\mu_2 = (b_2 + c_2)\mu_2 - (a_1 + b_1)\mu_1 > 0,$$

$$\text{所以 } c_1\mu_1 - a_1\mu_1 + c_2\mu_2 - a_2\mu_2 > b_1\mu_1 + c_1\mu_1 - a_2\mu_2 - b_2\mu_2,$$

$$\text{即 } P(\tilde{a}_1 \geq \tilde{a}_2) = \frac{b_1\mu_1 + c_1\mu_1 - a_2\mu_2 - b_2\mu_2}{(c_1 - a_1)\mu_1 + (c_2 - a_2)\mu_2};$$

$$\text{同理, } P(\tilde{a}_2 \geq \tilde{a}_1) = \frac{(b_2 + c_2)\mu_2 - (a_1 + b_1)\mu_1}{l_1\mu_1 + l_2\mu_2} = \frac{b_2\mu_2 + c_2\mu_2 - a_1\mu_1 - b_1\mu_1}{(c_1 - a_1)\mu_1 + (c_2 - a_2)\mu_2},$$

因此

$$\begin{aligned} & P(\tilde{a}_1 \geq \tilde{a}_2) + P(\tilde{a}_2 \geq \tilde{a}_1) \\ &= \frac{b_1\mu_1 + c_1\mu_1 - a_2\mu_2 - b_2\mu_2}{(c_1 - a_1)\mu_1 + (c_2 - a_2)\mu_2} + \frac{b_2\mu_2 + c_2\mu_2 - a_1\mu_1 - b_1\mu_1}{(c_1 - a_1)\mu_1 + (c_2 - a_2)\mu_2} = \frac{c_1\mu_1 - a_2\mu_2 + c_2\mu_2 - a_1\mu_1}{(c_1 - a_1)\mu_1 + (c_2 - a_2)\mu_2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

综上, 可证: $P(\tilde{a}_1 \geq \tilde{a}_2) + P(\tilde{a}_2 \geq \tilde{a}_1) = 1$ 。

例 2-4: 设 $\tilde{a}_1 = \langle [6.4, 8.0, 9.5]; [0.62, 0.8, 0.94] \rangle$; $\tilde{a}_2 = \langle [8.7, 9.9, 10]; [0.6, 0.7, 0.88] \rangle$;

$\tilde{a}_3 = \langle [7.1, 8.9, 9.9]; [0.6, 0.8, 0.92] \rangle$ 为三个二型三角模糊数, 根据可能度公式得:

$P(\tilde{a}_1 \geq \tilde{a}_2) = 0.016$, $P(\tilde{a}_2 \geq \tilde{a}_3) = 0.65$, $P(\tilde{a}_1 \geq \tilde{a}_3) = 0.25$, 进而可知: $\tilde{a}_1 < \tilde{a}_3 \leq \tilde{a}_2$ 。

2.2.5 二型三角模糊数的距离

定义 2-14 设 $\tilde{a}_1 = \langle [a_1, b_1, c_1]; [\mu_1^L, \mu_1^M, \mu_1^R] \rangle$ 和 $\tilde{a}_2 = \langle [a_2, b_2, c_2]; [\mu_2^L, \mu_2^M, \mu_2^R] \rangle$ 为两个二型三角模糊数, $a_i \geq 0, \mu_i^R \leq 1 (i=1, 2)$, 则它们间的 Hamming 距离为:

$$\begin{aligned} d(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2) = & \frac{1}{16} (|(\mu_1^L + 2\mu_1^M + \mu_1^R) \cdot a_1 - (\mu_2^L + 2\mu_2^M + \mu_2^R) \cdot a_2| \\ & + 2 \times |(\mu_1^L + 2\mu_1^M + \mu_1^R) \cdot b_1 - (\mu_2^L + 2\mu_2^M + \mu_2^R) \cdot b_2| \\ & + |(\mu_1^L + 2\mu_1^M + \mu_1^R) \cdot c_1 - (\mu_2^L + 2\mu_2^M + \mu_2^R) \cdot c_2|) \end{aligned} \quad (2-28)$$

2.3 权重确定方法

2.3.1 离差最大化方法

设准则权重为 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n), \omega_j \geq 0, j \in M$, 且满足单位化约束条件

$$\sum_{j=1}^m \omega_j^2 = 1 \quad (2-31)$$

那么, 各方案的综合准则值可以定义为:

$$z_i(\omega) = \sum_{j=1}^m r_{ij} \omega_j \quad (2-32)$$

由于方案在准则 u_j 下的准则值越相似, 则说明该准则对方案在决策中所起的

作用越小；反之，如果准则 u_j 能使所有方案存在较大差异，则说明这一准则对方案决策与排序具有着重要作用。因此，方案准则值偏差越大的准则，权重就应该越大。

对于准则 u_j ，用 $V_{ij}(\omega)$ 表示方案 x_i 与其他方案之间的离差，则可定义

$$V_{ij}(\omega) = \sum_{k=1}^n |r_{ij}\omega_j - r_{kj}\omega_j|, i \in N, j \in M. \quad (2-33)$$

令

$$V_j(\omega) = \sum_{i=1}^n V_{ij}(\omega) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |r_{ij} - r_{kj}| \omega_j, j \in M. \quad (2-34)$$

则 $V_j(\omega)$ 表示准则 u_j 下所有方案与其他方案的总离差。由此可得，加权向量 ω 应使所有方案的总离差最大。为此，构造目标函数

$$\max V(\omega) = \sum_{j=1}^m V_j(\omega) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |r_{ij} - r_{kj}| \omega_j. \quad (2-35)$$

于是，求解权重向量 ω 等价于求解如下模型：

$$\begin{cases} \max V(\omega) = \sum_{j=1}^m V_j(\omega) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |r_{ij} - r_{kj}| \omega_j \\ \text{s.t. } \omega_j \geq 0, j \in M, \sum_{j=1}^m \omega_j^2 = 1. \end{cases}$$

为解此最优化模型，作拉格朗日函数，令

$$L(\omega, \xi) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |r_{ij} - r_{kj}| \omega_j + \frac{1}{2} \xi (\sum_{j=1}^m \omega_j^2 - 1) \quad (2-36)$$

求偏导数，并令

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \omega_j} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |r_{ij} - r_{kj}| + \xi \omega_j = 0, j \in M \\ \frac{\partial L}{\partial \xi} = \sum_{j=1}^m \omega_j^2 - 1 = 0, \end{cases}$$

求得最优解

$$\omega_j^* = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |r_{ij} - r_{kj}|}{\sqrt{\sum_{j=1}^m [\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |r_{ij} - r_{kj}|]^2}}, j \in M. \quad (2-37)$$

对上述结果归一化处理，即进行如下转换：

$$\omega_j = \frac{\omega_j^*}{\sum_{j=1}^m \omega_j^*}, \quad j \in M. \quad (2-38)$$

由此得到

$$\omega_j = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |r_{ij} - r_{kj}|}{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |r_{ij} - r_{kj}|}, \quad j \in M. \quad (2-39)$$

利用上式可以计算出最优权重向量 ω 。

2.3.2 信息熵法

熵最初是热力学中的概念，后来用熵表示事物出现的不确定性。下面介绍用熵求解未知权重的方法：

设决策矩阵 $R = (r_{ij})_{n \times m}$ ，使用下式计算准则 u_j 输出的信息熵

$$E_j = -\frac{1}{\ln n} \sum_{i=1}^n r_{ij} \ln r_{ij}, \quad j \in M \quad (2-40)$$

特别地，当 $r_{ij} = 0$ 时，规定 $r_{ij} \ln r_{ij} = 0$ 。

那么，根据信息熵 E_j ，可以计算准则权重向量 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m)$ ，其中

$$\omega_j = \frac{1 - E_j}{\sum_{k=1}^m (1 - E_k)}。$$

第三章 二型三角模糊决策信息集成算子及其相关决策方法

一些含有定性准则的决策问题,如选举、选择绿色供应商等问题中,其定性准则的准则值往往难以以精确数或传统模糊数的形式给出,而用二型三角模糊数来解决这类多准则决策问题则能更全面的反映决策信息,更有优势。用二型三角模糊数来解决决策问题的前提是已知它的信息集成方法,但是目前有关二型三角模糊决策信息集成方法的研究依然空白,因此本章根据现有的算子,尝试解决这类问题。

3.1 加性二型三角模糊决策信息集成方法

当谈及模糊信息集成方法时,最经典的莫过于有序加权平均算子(*OWA* 算子)^[112],它将位置信息纳入信息集成方法中,首先按照降序排列数据,然后集成排序后的有序数列,这样达到的效果是:数据的权重只依赖于它所在的位置,而和数据本身无关。下面给出二型三角模糊有序加权平均算子(*TT2OWA* 算子)。

3.1.1 *TT2OWA* 算子

定义 3-1 设 $\tilde{a}_i = \langle [a_i, b_i, c_i]; [\mu_i^L, \mu_i^M, \mu_i^R] \rangle$ 为一组二型三角模糊数, $a_i \geq 0, \mu_i^R \leq 1$, 且设 $TT2OWA: \Omega^n \rightarrow \Omega^+$, 若

$$TT2OWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \sum_{i=1}^n \varphi_i \tilde{b}_i \quad (3-1)$$

其中: Ω^+ 为全体二型三角模糊数的集合; $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)^T$ 是与 *TT2OWA* 相关联的权重向量, $\varphi_i \in [0, 1]$, $\sum_{i=1}^n \varphi_i = 1$, $i = 1, \dots, n$ 。 \tilde{b}_i 为一组二型三角模糊数 $(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n)$ 中第 i 大的元素。则称 *TT2OWA* 为二型三角模糊数的有序加权平均算子, 简称 *TT2OWA* 算子。

定理 3-1 设 $\tilde{a}_i = \langle [a_i, b_i, c_i]; [\mu_i^L, \mu_i^M, \mu_i^R] \rangle$ 为一组二型三角模糊数, $a_i \geq 0, \mu_i^R \leq 1$, $\tilde{b}_i = \langle [a_{(i)}, b_{(i)}, c_{(i)}]; [\mu_{\tilde{b}_i}^L, \mu_{\tilde{b}_i}^M, \mu_{\tilde{b}_i}^R] \rangle$ 为 $(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n)$ 中第 i 大的元素, 则由 *TT2OWA* 算子对 \tilde{a}_i 集结后的结果仍为二型三角模糊数, 且有

$$TT2OWA_{\varphi}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \langle [\sum_{i=1}^n \varphi_i a_{(i)}, \sum_{i=1}^n \varphi_i b_{(i)}, \sum_{i=1}^n \varphi_i c_{(i)}]; \frac{\sum_{i=1}^n \varphi_i \|\tilde{b}_i\| \mu_{\tilde{b}_i}^L, \sum_{i=1}^n \varphi_i \|\tilde{b}_i\| \mu_{\tilde{b}_i}^M, \sum_{i=1}^n \varphi_i \|\tilde{b}_i\| \mu_{\tilde{b}_i}^R}{\sum_{i=1}^n \varphi_i \|\tilde{b}_i\|, \sum_{i=1}^n \varphi_i \|\tilde{b}_i\|, \sum_{i=1}^n \varphi_i \|\tilde{b}_i\|} \rangle \quad (3-2)$$

其中, $\|\tilde{b}_i\| = \frac{a_{(i)} + 2b_{(i)} + c_{(i)}}{4}$ 。

证明见定理 3-2。

二型三角模糊有序加权平均算子具有幂等性、有序单调性、有界性和置换不变性性质。

性质 3-1(幂等性) 设 $(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n)$ 为一组二型三角模糊数, \tilde{b}_i 为 $(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n)$ 中第 i 大的数, 若对于 $\forall \tilde{a}_i (i=1, 2, \dots, n)$, 均有 $\tilde{a}_i = \tilde{a}_0$, 则

$$TT2OWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \tilde{a}_0 \quad (3-3)$$

证明: 因为 $\tilde{a}_i = \tilde{b}_i = \tilde{a}_0$, $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$,

所以 $TT2OWA_{\omega}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \sum_{i=1}^n \omega_i \tilde{b}_i = \sum_{i=1}^n \omega_i \tilde{a}_0 = \tilde{a}_0 \sum_{i=1}^n \omega_i = \tilde{a}_0$ 。

性质 3-2(有序单调性) 设 $(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n)$ 和 $(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_n)$ 是两组按降序排列的二型三角模糊数组, 若对 $\forall i (i=1, 2, \dots, n)$, 均有 $\tilde{a}_i > \tilde{b}_i$, 则

$$TT2OWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) > TT2OWA(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_n) \quad (3-4)$$

证明: $TT2OWA_{\omega}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \sum_{i=1}^n \omega_i \tilde{a}_i$, $TT2OWA_{\omega}(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_n) = \sum_{i=1}^n \omega_i \tilde{b}_i$,

因为 $\tilde{a}_i > \tilde{b}_i$, 所以 $\sum_{i=1}^n \omega_i \tilde{a}_i > \sum_{i=1}^n \omega_i \tilde{b}_i$, $TT2OWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) > TT2OWA(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_n)$ 。

性质 3-3(有界性) 设 $(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n)$ 为一组二型三角模糊数, 其最大值为 \tilde{a}^* , 最小值为 \tilde{a}_* , 则

$$\tilde{a}_* \leq TT2OWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) \leq \tilde{a}^* \quad (3-5)$$

证明: 取两组二型三角模糊数分别为 $(\tilde{a}^*, \tilde{a}^*, \dots, \tilde{a}^*)$ 和 $(\tilde{a}_*, \tilde{a}_*, \dots, \tilde{a}_*)$,

由此可得到 $TT2OWA(\tilde{a}^*, \tilde{a}^*, \dots, \tilde{a}^*)$ 和 $TT2OWA(\tilde{a}_*, \tilde{a}_*, \dots, \tilde{a}_*)$,

由性质 3-2 可得

$TT2OWA(\tilde{a}_*, \tilde{a}_*, \dots, \tilde{a}_*) \leq TT2OWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) \leq TT2OWA(\tilde{a}^*, \tilde{a}^*, \dots, \tilde{a}^*)$,

而由性质 3-1 可得 $TT2OWA(\tilde{a}^*, \tilde{a}^*, \dots, \tilde{a}^*) = \tilde{a}^*$, $TT2OWA(\tilde{a}_*, \tilde{a}_*, \dots, \tilde{a}_*) = \tilde{a}_*$,

所以 $\tilde{a}_* \leq TT2OWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) \leq \tilde{a}^*$ 。

性质 3-4(置换不变性) 设 $(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n)$ 为一组二型三角模糊数, $(\tilde{a}'_1, \tilde{a}'_2, \dots, \tilde{a}'_n)$ 是 $(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n)$ 的任一置换, 则

$$TT2OWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = TT2OWA(\tilde{a}'_1, \tilde{a}'_2, \dots, \tilde{a}'_n) \quad (3-6)$$

证明: 由定义 3-1 得到 $TT2OWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \sum_{i=1}^n \varphi_i \tilde{b}_i$,

$$TT2OWA(\tilde{a}'_1, \tilde{a}'_2, \dots, \tilde{a}'_n) = \sum_{i=1}^n \varphi_i \tilde{b}_i,$$

所以 $TT2OWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = TT2OWA(\tilde{a}'_1, \tilde{a}'_2, \dots, \tilde{a}'_n)$ 。

例 3-1 一组二型三角模糊数 a_i 分别为 $\langle [3.43, 4.64, 5.65]; [0.72, 0.88, 0.97] \rangle$, $\langle [3.36, 4.71, 5.83]; [0.9, 1, 1] \rangle$, $\langle [3.54, 4.8, 5.63]; [0.74, 0.92, 1] \rangle$, $\langle [5.61, 6.5, 6.73]; [0.9, 1, 1] \rangle$, $\langle [1.27, 2.12, 2.97]; [0.43, 0.63, 0.83] \rangle$, 权重分别为 0.2, 0.22, 0.21, 0.22, 0.14; 根据第二章中记分函数的定义计算可得: $S(\tilde{a}_1) = 63.1$; $S(\tilde{a}_2) = 72.6$; $S(\tilde{a}_3) = 67.4$; $S(\tilde{a}_4) = 98.8$; $S(\tilde{a}_5) = 21.5$. 对记分函数进行排序得到: $S(\tilde{a}_4) > S(\tilde{a}_2) > S(\tilde{a}_3) > S(\tilde{a}_1) > S(\tilde{a}_5)$, 因此 $TT2OWA(\tilde{a}_i) = 0.2 \times a_4 + 0.22 \times a_2 + 0.21 \times a_3 + 0.22 \times a_1 + 0.14 \times a_5 = \langle [3.57, 4.71, 5.52]; [0.8, 0.92, 0.98] \rangle$ 。

由于二型三角模糊有序加权平均算子具有置换不变性性质, 因此很容易使我们想到一种特殊情况, 那就是当给出的数据恰好是按降序排列这一情况, 这时二型三角模糊有序加权平均算子就变成了另一个算子: 二型三角模糊加权算术平均算子($TT2WAA$ 算子)。二型三角模糊加权算术平均算子和数据的位置无关, 直接集成所给出的数据, 计算简便, 多应用在不同信息集成方法对结果影响不大或者所集成信息精度不高时。

3.1.2 $TT2WAA$ 算子

定义 3-2 设 $\tilde{a}_i = \langle [a_i, b_i, c_i]; [\mu_i^L, \mu_i^M, \mu_i^R] \rangle$ 为一组二型三角模糊数, $a_i \geq 0, \mu_i^R \leq 1$, 且设 $TT2WAA: \Omega^n \rightarrow \Omega^+$, 若

$$TT2WAA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \sum_{i=1}^n \omega_i \tilde{a}_i \quad (3-7)$$

其中: Ω^+ 为全体正的二型三角模糊数的集合; $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$ 为 $\tilde{a}_i (i=1, 2, \dots, n)$ 的权重向量, $\omega_i \in [0, 1]$, $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1, i=1, \dots, n$ 。则称 $TT2WAA$ 为二型三角模糊数的加权算术平均算子, 简称 $TT2WAA$ 算子。

定理 3-2 设 $\tilde{a}_i = \langle [a_i, b_i, c_i]; [\mu_i^L, \mu_i^M, \mu_i^R] \rangle$ 为一组二型三角模糊数, $a_i \geq 0, \mu_i^R \leq 1$, 则由 $TT2WAA$ 算子对 \tilde{a}_i 集结后的结果仍为二型三角模糊数, 且有:

$$TT2WAA_{\omega}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \langle [\sum_{i=1}^n \omega_i a_i, \sum_{i=1}^n \omega_i b_i, \sum_{i=1}^n \omega_i c_i]; \frac{\sum_{i=1}^n \omega_i \|\tilde{a}_i\| \mu_i^L}{\sum_{i=1}^n \omega_i \|\tilde{a}_i\|}, \frac{\sum_{i=1}^n \omega_i \|\tilde{a}_i\| \mu_i^M}{\sum_{i=1}^n \omega_i \|\tilde{a}_i\|}, \frac{\sum_{i=1}^n \omega_i \|\tilde{a}_i\| \mu_i^R}{\sum_{i=1}^n \omega_i \|\tilde{a}_i\|} \rangle \quad (3-8)$$

其中, $\|\tilde{a}_i\| = \frac{a_i + 2b_i + c_i}{4}$ 。

鉴于 $TT2OWA$ 算子和 $TT2WAA$ 算子的相似性, 现以定理 3-2 为例给出定理 3-1、定理 3-2 的证明方法。

证明: 显然, 二型三角模糊数的和依然是二型三角模糊数。下面用数学归纳法证明这个公式。

1) 当 $n=2$ 时,

因为

$$\sum_{i=1}^2 \omega_i \tilde{a}_i = \langle [\omega_1 a_1 + \omega_2 a_2, \omega_1 b_1 + \omega_2 b_2, \omega_1 c_1 + \omega_2 c_2]; \frac{\|\tilde{a}_1\| \omega_1 \mu_1^L + \|\tilde{a}_2\| \omega_2 \mu_2^L}{\omega_1 \|\tilde{a}_1\| + \omega_2 \|\tilde{a}_2\|}, \frac{\|\tilde{a}_1\| \omega_1 \mu_1^M + \|\tilde{a}_2\| \omega_2 \mu_2^M}{\omega_1 \|\tilde{a}_1\| + \omega_2 \|\tilde{a}_2\|}, \frac{\|\tilde{a}_1\| \omega_1 \mu_1^R + \|\tilde{a}_2\| \omega_2 \mu_2^R}{\omega_1 \|\tilde{a}_1\| + \omega_2 \|\tilde{a}_2\|} \rangle >$$

显然成立。

2) 假设当 $n=k$ 时公式成立, 即

$$\sum_{i=1}^k \omega_i \tilde{a}_i = \langle [\sum_{i=1}^k \omega_i a_i, \sum_{i=1}^k \omega_i b_i, \sum_{i=1}^k \omega_i c_i]; \frac{\sum_{i=1}^k \|\tilde{a}_i\| \omega_i \mu_i^L}{\sum_{i=1}^k \|\tilde{a}_i\| \omega_i}, \frac{\sum_{i=1}^k \|\tilde{a}_i\| \omega_i \mu_i^M}{\sum_{i=1}^k \|\tilde{a}_i\| \omega_i}, \frac{\sum_{i=1}^k \|\tilde{a}_i\| \omega_i \mu_i^R}{\sum_{i=1}^k \|\tilde{a}_i\| \omega_i} \rangle >$$

那么, 当 $n=k+1$ 时, 由运算规则可以得到:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} \omega_i \tilde{a}_i &= \sum_{i=1}^k \omega_i \tilde{a}_i + \omega_{k+1} \tilde{a}_{k+1} = \\ &\langle [\sum_{i=1}^k \omega_i a_i, \sum_{i=1}^k \omega_i b_i, \sum_{i=1}^k \omega_i c_i]; \frac{\sum_{i=1}^k \|\tilde{a}_i\| \omega_i \mu_i^L}{\sum_{i=1}^k \|\tilde{a}_i\| \omega_i}, \frac{\sum_{i=1}^k \|\tilde{a}_i\| \omega_i \mu_i^M}{\sum_{i=1}^k \|\tilde{a}_i\| \omega_i}, \frac{\sum_{i=1}^k \|\tilde{a}_i\| \omega_i \mu_i^R}{\sum_{i=1}^k \|\tilde{a}_i\| \omega_i} \rangle > \\ &+ \langle [\omega_{k+1} a_{k+1}, \omega_{k+1} b_{k+1}, \omega_{k+1} c_{k+1}]; \mu_{k+1}^L, \mu_{k+1}^M, \mu_{k+1}^R \rangle \\ &= \langle [\sum_{i=1}^k \omega_i a_i + \omega_{k+1} a_{k+1}, \sum_{i=1}^k \omega_i b_i + \omega_{k+1} b_{k+1}, \sum_{i=1}^k \omega_i c_i + \omega_{k+1} c_{k+1}]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\sum_{i=1}^k a_i + 2\sum_{i=1}^k b_i + \sum_{i=1}^k c_i}{4} \frac{\sum_{i=1}^k \|\tilde{a}_i\| \mu_i^L}{\sum_{i=1}^k \|\tilde{a}_i\|} \omega_i + \frac{a_{k+1} + 2b_{k+1} + c_{k+1}}{4} \omega_{k+1} \mu_{k+1}^L \\
 & \left[\frac{\sum_{i=1}^k a_i + 2\sum_{i=1}^k b_i + \sum_{i=1}^k c_i}{4} \omega_i + \frac{a_{k+1} + 2b_{k+1} + c_{k+1}}{4} \omega_{k+1} \right. \\
 & \frac{\sum_{i=1}^k a_i + 2\sum_{i=1}^k b_i + \sum_{i=1}^k c_i}{4} \frac{\sum_{i=1}^k \|\tilde{a}_i\| \mu_i^M}{\sum_{i=1}^k \|\tilde{a}_i\|} \omega_i + \frac{a_{k+1} + 2b_{k+1} + c_{k+1}}{4} \omega_{k+1} \mu_{k+1}^M \\
 & \left. \frac{\sum_{i=1}^k a_i + 2\sum_{i=1}^k b_i + \sum_{i=1}^k c_i}{4} \omega_i + \frac{a_{k+1} + 2b_{k+1} + c_{k+1}}{4} \omega_{k+1} \right. \\
 & \frac{\sum_{i=1}^k a_i + 2\sum_{i=1}^k b_i + \sum_{i=1}^k c_i}{4} \frac{\sum_{i=1}^k \|\tilde{a}_i\| \mu_i^R}{\sum_{i=1}^k \|\tilde{a}_i\|} \omega_i + \frac{a_{k+1} + 2b_{k+1} + c_{k+1}}{4} \omega_{k+1} \mu_{k+1}^R \\
 & \left. \frac{\sum_{i=1}^k a_i + 2\sum_{i=1}^k b_i + \sum_{i=1}^k c_i}{4} \omega_i + \frac{a_{k+1} + 2b_{k+1} + c_{k+1}}{4} \omega_{k+1} \right] > \\
 & = \langle [\sum_{i=1}^{k+1} \omega_i a_i, \sum_{i=1}^{k+1} \omega_i b_i, \sum_{i=1}^{k+1} \omega_i c_i]; \\
 & \frac{\sum_{i=1}^k \|\tilde{a}_i\| \omega_i \mu_i^L + \frac{a_{k+1} + 2b_{k+1} + c_{k+1}}{4} \omega_{k+1} \mu_{k+1}^L}{\sum_{i=1}^k \omega_i a_i + \omega_{k+1} a_{k+1} + 2\sum_{i=1}^k \omega_i b_i + 2\omega_{k+1} b_{k+1} + \sum_{i=1}^k \omega_i c_i + \omega_{k+1} c_{k+1}} \\
 & \frac{\sum_{i=1}^k \|\tilde{a}_i\| \omega_i \mu_i^M + \frac{a_{k+1} + 2b_{k+1} + c_{k+1}}{4} \omega_{k+1} \mu_{k+1}^M}{\sum_{i=1}^k \omega_i a_i + \omega_{k+1} a_{k+1} + 2\sum_{i=1}^k \omega_i b_i + 2\omega_{k+1} b_{k+1} + \sum_{i=1}^k \omega_i c_i + \omega_{k+1} c_{k+1}} \\
 & \frac{\sum_{i=1}^k \|\tilde{a}_i\| \omega_i \mu_i^R + \frac{a_{k+1} + 2b_{k+1} + c_{k+1}}{4} \omega_{k+1} \mu_{k+1}^R}{\sum_{i=1}^k \omega_i a_i + \omega_{k+1} a_{k+1} + 2\sum_{i=1}^k \omega_i b_i + 2\omega_{k+1} b_{k+1} + \sum_{i=1}^k \omega_i c_i + \omega_{k+1} c_{k+1}} \rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left\langle \left[\sum_{i=1}^k \omega_i a_i, \sum_{i=1}^k \omega_i b_i, \sum_{i=1}^k \omega_i c_i \right]; \left[\frac{\sum_{i=1}^k \frac{a_i + 2b_i + c_i}{4} \omega_i \mu_i^L + \frac{a_{k+1} + 2b_{k+1} + c_{k+1}}{4} \omega_{k+1} \mu_{k+1}^L}{\sum_{i=1}^{k+1} \omega_i a_i + 2 \sum_{i=1}^{k+1} \omega_i b_i + \sum_{i=1}^{k+1} \omega_i c_i}, \right. \right. \\
 &\quad \left. \frac{\sum_{i=1}^k \frac{a_i + 2b_i + c_i}{4} \omega_i \mu_i^M + \frac{a_{k+1} + 2b_{k+1} + c_{k+1}}{4} \omega_{k+1} \mu_{k+1}^M}{\sum_{i=1}^{k+1} \omega_i a_i + 2 \sum_{i=1}^{k+1} \omega_i b_i + \sum_{i=1}^{k+1} \omega_i c_i}, \right. \\
 &\quad \left. \frac{\sum_{i=1}^k \frac{a_i + 2b_i + c_i}{4} \omega_i \mu_i^R + \frac{a_{k+1} + 2b_{k+1} + c_{k+1}}{4} \omega_{k+1} \mu_{k+1}^R}{\sum_{i=1}^{k+1} \omega_i a_i + 2 \sum_{i=1}^{k+1} \omega_i b_i + \sum_{i=1}^{k+1} \omega_i c_i} \right] \rangle \\
 &= \left\langle \left[\sum_{i=1}^{k+1} \omega_i a_i, \sum_{i=1}^{k+1} \omega_i b_i, \sum_{i=1}^{k+1} \omega_i c_i \right]; \right. \\
 &\quad \left. \frac{\sum_{i=1}^{k+1} \frac{a_i + 2b_i + c_i}{4} \omega_i \mu_i^L}{\sum_{i=1}^{k+1} \omega_i \|\tilde{a}_i\|}, \frac{\sum_{i=1}^{k+1} \frac{a_i + 2b_i + c_i}{4} \omega_i \mu_i^M}{\sum_{i=1}^{k+1} \omega_i \|\tilde{a}_i\|}, \frac{\sum_{i=1}^{k+1} \frac{a_i + 2b_i + c_i}{4} \omega_i \mu_i^R}{\sum_{i=1}^{k+1} \omega_i \|\tilde{a}_i\|} \right] \rangle \\
 &= \left\langle \left[\sum_{i=1}^{k+1} \omega_i a_i, \sum_{i=1}^{k+1} \omega_i b_i, \sum_{i=1}^{k+1} \omega_i c_i \right]; \left[\frac{\sum_{i=1}^{k+1} \|\tilde{a}_i\| \omega_i \mu_i^L}{\sum_{i=1}^{k+1} \|\tilde{a}_i\| \omega_i}, \frac{\sum_{i=1}^{k+1} \|\tilde{a}_i\| \omega_i \mu_i^M}{\sum_{i=1}^{k+1} \|\tilde{a}_i\| \omega_i}, \frac{\sum_{i=1}^{k+1} \|\tilde{a}_i\| \omega_i \mu_i^R}{\sum_{i=1}^{k+1} \|\tilde{a}_i\| \omega_i} \right] \right\rangle.
 \end{aligned}$$

所以，当 $n = k + 1$ 时，公式也成立。

因此，基于 1) 和 2)，对于 $n \in N$ ，公式均成立。

$TT2WAA$ 算子同样具有幂等性、有序单调性和有界性。

性质 3-5(幂等性) 设 $(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n)$ 为一组二型三角模糊数，若对于 $\forall \tilde{a}_i (i = 1, 2, \dots, n)$ ，均有 $\tilde{a}_i = \tilde{a}_0$ ，则

$$TT2WAA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \tilde{a}_0 \quad (3-9)$$

证明：因为 $\tilde{a}_i = \tilde{a}_0$ ， $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ ，

所以 $TT2WAA_\omega(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \sum_{i=1}^n \omega_i \tilde{a}_i = \sum_{i=1}^n \omega_i \tilde{a}_0 = \tilde{a}_0 \sum_{i=1}^n \omega_i = \tilde{a}_0$ 。

性质 3-6(有序单调性) 设 $(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n)$ 和 $(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_n)$ 是两组按降序排列的

二型三角模糊数组, 若对 $\forall i(i=1,2,\dots,n)$, 均有 $\tilde{a}_i > \tilde{b}_i$, 则

$$TT2WAA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) > TT2WAA(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_n) \quad (3-10)$$

证明: $TT2WAA_{\omega}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \sum_{i=1}^n \omega_i \tilde{a}_i$, $TT2WAA_{\omega}(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_n) = \sum_{i=1}^n \omega_i \tilde{b}_i$,

因为 $\tilde{a}_i > \tilde{b}_i$, 所以 $\sum_{i=1}^n \omega_i \tilde{a}_i > \sum_{i=1}^n \omega_i \tilde{b}_i$, $TT2WAA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) > TT2WAA(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_n)$ 。

性质 3-7(有界性) 设 $(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n)$ 为一组二型三角模糊数, 其最大值为 \tilde{a}^* , 最小值为 \tilde{a}_* , 则

$$\tilde{a}_* \leq TT2WAA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) \leq \tilde{a}^* \quad (3-11)$$

证明: 取两组二型三角模糊数分别为 $(\tilde{a}^*, \tilde{a}^*, \dots, \tilde{a}^*)$ 和 $(\tilde{a}_*, \tilde{a}_*, \dots, \tilde{a}_*)$, 由此可得到 $TT2WAA(\tilde{a}^*, \tilde{a}^*, \dots, \tilde{a}^*)$ 和 $TT2WAA(\tilde{a}_*, \tilde{a}_*, \dots, \tilde{a}_*)$, 由性质 3-6 可得

$$TT2WAA(\tilde{a}_*, \tilde{a}_*, \dots, \tilde{a}_*) \leq TT2WAA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) \leq TT2WAA(\tilde{a}^*, \tilde{a}^*, \dots, \tilde{a}^*),$$

而由性质 3-5 可得 $TT2WAA(\tilde{a}^*, \tilde{a}^*, \dots, \tilde{a}^*) = \tilde{a}^*$, $TT2WAA(\tilde{a}_*, \tilde{a}_*, \dots, \tilde{a}_*) = \tilde{a}_*$,

所以 $\tilde{a}_* \leq TT2WAA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) \leq \tilde{a}^*$ 。

例 3-2 设三个二型三角模糊数 $\tilde{a}_1 = \langle [5,7,9]; [0.7,0.9,1.0] \rangle$, $\tilde{a}_2 = \langle [7,9,10]; [0.9,1.0,1.0] \rangle$, $\tilde{a}_3 = \langle [5,7,9]; [0.5,0.7,0.9] \rangle$, $\omega = (0.33, 0.34, 0.33)$ 为其权重向量, 那么经 $TT2WAA$ 算子集结后:

$$TT2WAA_{\omega}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3) = \langle [3.43, 4.64, 5.65]; [0.72, 0.88, 0.97] \rangle.$$

为了综合上述两个算子的特点, 既注重数据的位置同时又充分考虑数据本身, 二型三角模糊混合加权平均算子($TT2HA$ 算子)被提出来:

3.1.3 $TT2HA$ 算子

定义 3-3 设 $\tilde{a}_i = \langle [a_i, b_i, c_i]; [\mu_i^L, \mu_i^M, \mu_i^R] \rangle$ 为一组正的二型三角模糊数, 且设 $TT2HA: \Omega^n \rightarrow \Omega^+$, 若

$$TT2HA_{\omega, \varphi}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \sum_{i=1}^n \varphi_i \tilde{c}_i \quad (3-12)$$

其中 $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ 是与 $TT2HA$ 相关联的加权向量, $\varphi_i \in [0, 1]$, $\sum_{i=1}^n \varphi_i = 1$, $i=1, 2, \dots, n$, \tilde{c}_i 是一组二型三角模糊数 $(n\omega_1\tilde{a}_1, n\omega_2\tilde{a}_2, \dots, n\omega_n\tilde{a}_n)$ 中第 i 大的元素, 这里 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ 是二型三角模糊数 \tilde{a}_i 的加权向量, $\omega_i \in [0, 1]$, $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$, $i=1, \dots, n$, n 是平衡因子。则称 $TT2HA$ 为二型三角模糊数的混合加权平均算子, 简称 $TT2HA$ 算子。

定理 3-3 设 $\tilde{a}_i = \langle [a_i, b_i, c_i]; [\mu_i^L, \mu_i^M, \mu_i^R] \rangle$ 为一组正的二型三角模糊数, 即 $a_i > 0$, \tilde{c}_i 是二型三角模糊数 $(n\omega_1\tilde{a}_1, n\omega_2\tilde{a}_2, \dots, n\omega_n\tilde{a}_n)$ 中第 i 大的元素, 其中 n 是平衡因子, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ 是二型三角模糊数 \tilde{a}_i 的加权向量, $\omega_i \in [0, 1]$, $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$,

$i=1, \dots, n$, 设 $\tilde{c}_i = \langle ([a_i^{\tilde{c}}, b_i^{\tilde{c}}, c_i^{\tilde{c}}]; [\mu_{\tilde{c}_i}^L, \mu_{\tilde{c}_i}^M, \mu_{\tilde{c}_i}^R]) \rangle$, 则由 $TT2HA$ 对 \tilde{a}_i 集结后的结果仍为二型三角模糊数, 且有

$$TT2HA_{\omega, \varphi}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \langle [\sum_{i=1}^n \varphi_i a_i^{\tilde{c}}, \sum_{i=1}^n \varphi_i b_i^{\tilde{c}}, \sum_{i=1}^n \varphi_i c_i^{\tilde{c}}]; \left[\frac{\sum_{i=1}^n \varphi_i \mu_{\tilde{c}_i}^L \|\tilde{c}_i\|}{\sum_{i=1}^n \varphi_i \|\tilde{c}_i\|}, \frac{\sum_{i=1}^n \varphi_i \mu_{\tilde{c}_i}^M \|\tilde{c}_i\|}{\sum_{i=1}^n \varphi_i \|\tilde{c}_i\|}, \frac{\sum_{i=1}^n \varphi_i \mu_{\tilde{c}_i}^R \|\tilde{c}_i\|}{\sum_{i=1}^n \varphi_i \|\tilde{c}_i\|} \right] \rangle \quad (3-13)$$

其中, $\|\tilde{c}_i\| = \frac{a_i^{\tilde{c}} + 2b_i^{\tilde{c}} + c_i^{\tilde{c}}}{4}$ 。

定理 3-4 $TT2WAA$ 、 $TT2OWA$ 分别为 $TT2HA$ 算子的特例。当 $\varphi = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$ 时, $TT2HA$ 算子退化为二型三角模糊加权算术平均($TT2WAA$)算子; 当 $\omega = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$ 时, $TT2HA$ 则退化为二型三角模糊有序加权平均($TT2OWA$)算子。

Yager^[113]给出了 OWA 算子的一个著名的扩展——诱导的有序加权平均算子($IOWA$ 算子), 该算子将 OWA 算子中的位置信息替换为诱导信息, 首先按照诱导向量排列数据, 然后集成排序后的有序数列, 这样达到的效果是: 数据的权重只依赖于它的诱导向量。 $IOWA$ 算子使算子的集结不再仅限于数据位置所带来的影响, 而是考虑到了一切可能影响数据排列的因素, 将它们统一命名为诱导向量, 并引入信息集成方法中。下面给出二型三角模糊数的诱导有序加权平均算子($ITT2OWA$ 算子)。

3.1.4 $ITT2OWA$ 算子

根据二型三角模糊数的隶属度部分的意义以及其在信息集结中的作用, 下面给出二型三角模糊数的信心水平:

定义 3-4 二型三角模糊数 $\tilde{a} = \langle [a, b, c]; [\mu^L, \mu^M, \mu^R] \rangle$ 的信心水平为:

$$\beta = \mu^L + 2\mu^M + \mu^R \quad (3-14)$$

信心水平体现了决策者对于自己所给出的决策信息的确定程度, 从侧面反映了该信息的正确率和可信度。可见, 信心水平越大, 该信息越可信, 因此更应该侧重考虑, 相反的, 信心水平越小, 该信息越不可信, 因此更不应该过多考虑。根据信心水平的这一意义, 下面给出 $ITT2OWA$ 算子。

定义 3-5 设 $\tilde{a}_i = \langle [a_i, b_i, c_i]; [\mu_i^L, \mu_i^M, \mu_i^R] \rangle$ 为一组二型三角模糊数, $a_i \geq 0$, $\mu_i^R \leq 1$, 且设 $ITT2OWA: \Omega^n \rightarrow \Omega^+$, 若

$$ITT2OWA((\beta_1, \tilde{a}_1), (\beta_2, \tilde{a}_2), \dots, (\beta_n, \tilde{a}_n)) = \sum_{i=1}^n \omega_i \tilde{a}_{\theta(i)} \quad (3-15)$$

则称 $ITT2OWA$ 为二型三角模糊数的诱导有序加权平均算子, 简称 $ITT2OWA$ 算

子。其中： Ω^+ 为全体二型三角模糊数的集合； $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$ 是与 $ITT2OWA$ 相关联的加权向量， $\omega_i \in [0,1]$ ， $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ ， $i = 1, \dots, n$ 。 $\theta(i)$ 是 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 中第 i 大的元素所对应的下标， $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 称为诱导变量。

定理 3-5 设 $\tilde{a}_i = \langle [a_i, b_i, c_i]; [\mu_i^L, \mu_i^M, \mu_i^R] \rangle$ 为一组二型三角模糊数， $a_i \geq 0, \mu_i^R \leq 1$ ， $\tilde{a}_{\theta(i)} = \langle [a_{\theta(i)}, b_{\theta(i)}, c_{\theta(i)}]; [\mu_{\theta(i)}^L, \mu_{\theta(i)}^M, \mu_{\theta(i)}^R] \rangle$ ， $\theta(i)$ 是 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 中第 i 大的元素所对应的下标，则由 $ITT2OWA$ 算子对 \tilde{a}_i 集结后的结果仍为二型三角模糊数，且有

$$ITT2OWA_{\omega}(\tilde{a}_i) = \langle [\sum_{i=1}^n \omega_i a_{\theta(i)}, \sum_{i=1}^n \omega_i b_{\theta(i)}, \sum_{i=1}^n \omega_i c_{\theta(i)}]; \left[\frac{\sum_{i=1}^n \omega_i \|\tilde{a}_{\theta(i)}\| \mu_{\theta(i)}^L}{\sum_{i=1}^n \omega_i \|\tilde{a}_{\theta(i)}\|}, \frac{\sum_{i=1}^n \omega_i \|\tilde{a}_{\theta(i)}\| \mu_{\theta(i)}^M}{\sum_{i=1}^n \omega_i \|\tilde{a}_{\theta(i)}\|}, \frac{\sum_{i=1}^n \omega_i \|\tilde{a}_{\theta(i)}\| \mu_{\theta(i)}^R}{\sum_{i=1}^n \omega_i \|\tilde{a}_{\theta(i)}\|} \right] \rangle \quad (3-16)$$

其中， $\|\tilde{a}_{\theta(i)}\| = \frac{a_{\theta(i)} + 2b_{\theta(i)} + c_{\theta(i)}}{4}$ 。

3.2 积型二型三角模糊决策信息集成方法

基于几何平均的概念，Chiclana 等^[114]提出有序加权几何平均算子(OWG 算子)。 OWA 算子多侧重于多个决策者的决策，而 OWG 算子多侧重于单一决策者的决策。下面给出二型三角模糊有序加权几何平均算子($TT2OWG$ 算子)。

3.2.1 $TT2OWG$ 算子

定义 3-6 设 $\tilde{a}_i = \langle [a_i, b_i, c_i]; [\mu_i^L, \mu_i^M, \mu_i^R] \rangle$ 为一组二型三角模糊数， $a_i \geq 0, \mu_i^R \leq 1$ ，且设 $TT2OWG: \Omega^n \rightarrow \Omega^+$ ，若

$$TT2OWG(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \sum_{i=1}^n \tilde{b}_i^{\varphi_i} \quad (3-17)$$

其中： Ω^+ 为全体二型三角模糊数的集合； $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)^T$ 是与 $TT2OWG$ 相关联的权重向量， $\varphi_i \in [0,1]$ ， $\sum_{i=1}^n \varphi_i = 1$ ， $i = 1, \dots, n$ 。 \tilde{b}_i 为一组二型三角模糊数

$(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n)$ 中第 i 大的元素。则称 $TT2OWG$ 为二型三角模糊数的有序加权几何

平均算子，简称 $TT2OWG$ 算子。

定理 3-6 设 $\tilde{a}_i = \langle [a_i, b_i, c_i]; [\mu_i^L, \mu_i^M, \mu_i^R] \rangle$ 为一组二型三角模糊数， $a_i \geq 0, \mu_i^R \leq 1$ ， $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)^T$ 是与 $TT2OWG$ 相关联的权重向量， $\varphi_i \in [0, 1]$ ， $\sum_{i=1}^n \varphi_i = 1, i = 1, \dots, n$ 。 $\tilde{b}_i = \langle [a_{(i)}, b_{(i)}, c_{(i)}]; [\mu_{ib_i}^L, \mu_{ib_i}^M, \mu_{ib_i}^R] \rangle$ 为 $(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n)$ 中第 i 大的元素，则由 $TT2OWG$ 算子对 \tilde{a}_i 集结后的结果仍为二型三角模糊数，且有

$$TT2OWG(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \langle [\prod_{i=1}^n a_{(i)}^{\varphi_i}, \prod_{i=1}^n b_{(i)}^{\varphi_i}, \prod_{i=1}^n c_{(i)}^{\varphi_i}]; [\prod_{i=1}^n \mu_{ib_i}^{L\varphi_i}, \prod_{i=1}^n \mu_{ib_i}^{M\varphi_i}, \prod_{i=1}^n \mu_{ib_i}^{R\varphi_i}] \rangle \quad (3-18)$$

$TT2OWG$ 算子同样满足 $TT2OWA$ 算子所具有的幂等性、置换不变性、有界性、有序单调性性质。

同样地，相对于 $TT2WAA$ 算子、 $TT2HA$ 算子和 $ITT2OWA$ 算子，基于几何平均概念的二型三角模糊加权几何平均算子 ($TT2WGA$ 算子)、二型三角模糊混合几何平均算子 ($TT2HGA$ 算子) 和二型三角模糊数的诱导有序加权几何平均算子 ($ITT2OWG$ 算子) 也具有深远的应用价值。

3.2.2 $TT2WGA$ 算子

定义 3-7 设 $\tilde{a}_i = \langle [a_i, b_i, c_i]; [\mu_i^L, \mu_i^M, \mu_i^R] \rangle$ 为一组非负的二型三角模糊数，即 $a_i \geq 0, \mu_i^R \leq 1$ ，且设 $TT2WGA: \Omega^n \rightarrow \Omega^+$ ，若

$$TT2WGA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \prod_{i=1}^n \tilde{a}_i^{\omega_i} \quad (3-19)$$

其中 Ω^+ 为二的型三角模糊数的集合， $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$ 为 $\tilde{a}_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 的指数加权向量， $\omega_i \in [0, 1]$ ， $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1, i = 1, 2, \dots, n$ 。则称 $TT2WGA$ 函数为二型三角模糊加权几何平均算子，简称 $TT2WGA$ 算子。

定理 3-7 设 $\tilde{a}_i = \langle [a_i, b_i, c_i]; [\mu_i^L, \mu_i^M, \mu_i^R] \rangle$ 为一组非负的二型三角模糊数，即 $a_i \geq 0, \mu_i^R \leq 1$ ， $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$ 为 $\tilde{a}_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 的加权向量， $\omega_i \in [0, 1]$ ， $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1, i = 1, 2, \dots, n$ ，则由 $TT2WGA$ 集结后的结果仍为二型三角模糊数，且 $TT2WGA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \langle [\prod_{i=1}^n a_i^{\omega_i}, \prod_{i=1}^n b_i^{\omega_i}, \prod_{i=1}^n c_i^{\omega_i}]; [\prod_{i=1}^n \mu_{\tilde{a}_i}^{L\omega_i}, \prod_{i=1}^n \mu_{\tilde{a}_i}^{M\omega_i}, \prod_{i=1}^n \mu_{\tilde{a}_i}^{R\omega_i}] \rangle$ (3-20)

容易证明 $TT2WGA$ 算子具有幂等性、有序单调性、有界性性质。

3.2.3 $TT2HGA$ 算子

定义 3-8 设 $\tilde{a}_i = \langle [a_i, b_i, c_i]; [\mu_i^L, \mu_i^M, \mu_i^R] \rangle$ 为一组正的二型三角模糊数，且设

$TT2HGA: \Omega^n \rightarrow \Omega^+$, 若

$$TT2HGA_{\omega, \varphi}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \prod_{i=1}^n \tilde{c}_i^{\varphi_i} \quad (3-21)$$

其中 $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ 是与 $TT2HGA$ 相关联的加权向量, $\varphi_i \in [0, 1]$, $\sum_{i=1}^n \varphi_i = 1$, $i = 1, 2, \dots, n$, \tilde{c}_i 是一组二型三角模糊数 $(n\omega_1\tilde{a}_1, n\omega_2\tilde{a}_2, \dots, n\omega_n\tilde{a}_n)$ 中第 i 大的元素, 这里 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ 是二型三角模糊数 \tilde{a}_i 的加权向量, $\omega_i \in [0, 1]$, $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$, $i = 1, \dots, n$, n 是平衡因子。则称 $TT2HGA$ 为二型三角模糊混合几何平均算子, 简称 $TT2HGA$ 算子。

定理 3-8 设 $\tilde{a}_i = \langle [a_i, b_i, c_i]; [\mu_i^L, \mu_i^M, \mu_i^R] \rangle$ 为一组正的二型三角模糊数, 即 $a_i > 0$, \tilde{c}_i 是二型三角模糊数 $(n\omega_1\tilde{a}_1, n\omega_2\tilde{a}_2, \dots, n\omega_n\tilde{a}_n)$ 中第 i 大的元素, 其中 n 是平衡因子, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ 是二型三角模糊数 \tilde{a}_i 的加权向量, $\omega_i \in [0, 1]$, $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$, $i = 1, \dots, n$, 设 $\tilde{c}_i = \langle ([a_i^{\tilde{c}}, b_i^{\tilde{c}}, c_i^{\tilde{c}}]; [\mu_{\tilde{c}_i}^L, \mu_{\tilde{c}_i}^M, \mu_{\tilde{c}_i}^R]) \rangle$, 则由 $TT2HGA$ 对 \tilde{a}_i 集结后的结果仍为二型三角模糊数, 且有

$$TT2HGA_{\omega, \varphi}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \langle [\prod_{i=1}^n a_i^{\tilde{c}\varphi_i}, \prod_{i=1}^n b_i^{\tilde{c}\varphi_i}, \prod_{i=1}^n c_i^{\tilde{c}\varphi_i}]; [\prod_{i=1}^n \mu_{\tilde{c}_i}^{L\varphi_i}, \prod_{i=1}^n \mu_{\tilde{c}_i}^{M\varphi_i}, \prod_{i=1}^n \mu_{\tilde{c}_i}^{R\varphi_i}] \rangle \quad (3-22)$$

3.2.4 ITT2OWG 算子

定义 3-9 设 $\tilde{a}_i = \langle [a_i, b_i, c_i]; [\mu_i^L, \mu_i^M, \mu_i^R] \rangle$ 为一组二型三角模糊数, $a_i \geq 0, \mu_i^R \leq 1$, 且设 $ITT2OWG: \Omega^n \rightarrow \Omega^+$, 若

$$ITT2OWG((\beta_1, \tilde{a}_1), (\beta_2, \tilde{a}_2), \dots, (\beta_n, \tilde{a}_n)) = \prod_{i=1}^n \tilde{a}_{\theta(i)}^{\omega_i} \quad (3-23)$$

则称 $ITT2OWG$ 为二型三角模糊数的诱导有序加权几何平均算子, 简称 $ITT2OWG$ 算子。其中: Ω^+ 为全体二型三角模糊数的集合; $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$ 是与 $ITT2OWG$ 相关联的加权向量, $\omega_i \in [0, 1]$, $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$, $i = 1, \dots, n$ 。 $\theta(i)$ 是

$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 中第 i 大的元素所对应的下标, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 称为诱导变量。

定理 3-9 设 $\tilde{a}_i = \langle [a_i, b_i, c_i]; [\mu_i^L, \mu_i^M, \mu_i^R] \rangle$ 为一组二型三角模糊数, $a_i \geq 0, \mu_i^R \leq 1$, $\tilde{a}_{\theta(i)} = \langle [a_{\theta(i)}, b_{\theta(i)}, c_{\theta(i)}]; [\mu_{\theta(i)}^L, \mu_{\theta(i)}^M, \mu_{\theta(i)}^R] \rangle$, $\theta(i)$ 是 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 中第 i 大的元素所对应的下标, 则由 $ITT2OWG$ 算子对 \tilde{a}_i 集结后的结果仍为二型三角模糊数, 且有

$$ITT2OWG_{\omega}(\tilde{a}_i) = \langle [\prod_{i=1}^n a_{\theta(i)}^{\omega_i}, \prod_{i=1}^n b_{\theta(i)}^{\omega_i}, \prod_{i=1}^n c_{\theta(i)}^{\omega_i}]; [\prod_{i=1}^n \mu_{\theta(i)}^L{}^{\omega_i}, \prod_{i=1}^n \mu_{\theta(i)}^M{}^{\omega_i}, \prod_{i=1}^n \mu_{\theta(i)}^R{}^{\omega_i}] \rangle \quad (3-24)$$

3.3 准则间有关联的二型三角模糊决策信息集成方法

在有些问题中，集成的信息间并非相互独立，而是存在着某种关联，这类问题中，前面的算子都不再适用，一类针对关联信息集结的算子亟需提出。在此背景下，多个处理关联信息的算子相继提出，其中较能客观的反映信息之间的关联程度的是幂平均算子(PA 算子)^[115]，PA 算子的特点是数据的权重依赖于其他数据对它的支持程度。

3.3.1 TT2PA 算子

定义 3-10^[115] 若

$$PA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \frac{\sum_{i=1}^n (1+T(\tilde{a}_i))\tilde{a}_i}{\sum_{i=1}^n (1+T(\tilde{a}_i))} \quad (3-25)$$

则称 PA 为幂均算子，简称 PA 算子。其中： $T(\tilde{a}_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n Sup(\tilde{a}_i, \tilde{a}_j)$ ， $Sup(\tilde{a}_i, \tilde{a}_j)$ 是

\tilde{a}_j 对 \tilde{a}_i 的支持，且满足以下性质：

- (1) $Sup(\tilde{a}_i, \tilde{a}_j) \in [0, 1]$;
- (2) $Sup(\tilde{a}_i, \tilde{a}_j) = Sup(\tilde{a}_j, \tilde{a}_i)$;
- (3) 如果 $|\tilde{a}_i - \tilde{a}_j| < |\tilde{a}_s - \tilde{a}_t|$ ，那么 $Sup(\tilde{a}_i, \tilde{a}_j) \geq Sup(\tilde{a}_s, \tilde{a}_t)$ 。

2011 年，Xu^[116]将幂均算子扩展到直觉模糊集领域，据此，下面给出二型三角模糊幂平均算子(TT2PA 算子)、二型三角模糊幂加权平均算子(TT2PWA 算子)和二型三角模糊幂有序加权平均算子(TT2POWA 算子)的定义。

定义 3-11 $Sup(\tilde{a}_i, \tilde{a}_j)$ 表示 \tilde{a}_j 对 \tilde{a}_i 的支持， $d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_j)$ 表示 \tilde{a}_i 和 \tilde{a}_j 间的 Hamming 距离， $Sup(\tilde{a}_i, \tilde{a}_j) = \max\{d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_1), d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_2), \dots, d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_n)\} - d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_j)$
 $Sup(\tilde{a}_i, \tilde{a}_j)$ 满足以下性质：

- (1) $Sup(\tilde{a}_i, \tilde{a}_j) \in [0, 1]$;
- (2) $Sup(\tilde{a}_i, \tilde{a}_j) = Sup(\tilde{a}_j, \tilde{a}_i)$;
- (3) 如果 $d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_j) < d(\tilde{a}_s, \tilde{a}_t)$ ，那么 $Sup(\tilde{a}_i, \tilde{a}_j) \geq Sup(\tilde{a}_s, \tilde{a}_t)$ 。

定义 3-12 设 $\tilde{a}_i = \langle [a_i, b_i, c_i]; [\mu_i^L, \mu_i^M, \mu_i^R] \rangle$ 为一组二型三角模糊数，

$a_i \geq 0, \mu_i^R \leq 1$, 且设 $TT2PA: \Omega^n \rightarrow \Omega^+$, 若

$$TT2PA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \frac{\sum_{i=1}^n (1+T(\tilde{a}_i))\tilde{a}_i}{\sum_{i=1}^n (1+T(\tilde{a}_i))} \quad (3-26)$$

则称 $TT2PA$ 为二型三角模糊数的幂平均算子, 简称 $TT2PA$ 算子。其中: Ω^+ 为全

体正的二型三角模糊数的集合, $T(\tilde{a}_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n Sup(\tilde{a}_i, \tilde{a}_j)$ 。

定理 3-10 设 $\tilde{a}_i = \langle [a_i, b_i, c_i]; [\mu_i^L, \mu_i^M, \mu_i^R] \rangle$ 为一组二型三角模糊数, $a_i \geq 0, \mu_i^R \leq 1$, 则由 $TT2PA$ 算子对 \tilde{a}_i 集结后的结果仍为二型三角模糊数, 且有:

$$TT2PA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) =$$

$$\begin{aligned} & \frac{\sum_{i=1}^n (1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\max\{d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_1), d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_2), \dots, d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_n)\} - d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_j))) a_i}{\sum_{i=1}^n (1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\max\{d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_1), d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_2), \dots, d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_n)\} - d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_j)))}, \\ & \frac{\sum_{i=1}^n (1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\max\{d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_1), d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_2), \dots, d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_n)\} - d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_j))) b_i}{\sum_{i=1}^n (1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\max\{d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_1), d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_2), \dots, d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_n)\} - d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_j)))}, \\ & \frac{\sum_{i=1}^n (1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\max\{d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_1), d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_2), \dots, d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_n)\} - d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_j))) c_i}{\sum_{i=1}^n (1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\max\{d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_1), d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_2), \dots, d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_n)\} - d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_j)))}; \\ & \left[\frac{\sum_{i=1}^n (1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\max\{d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_1), d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_2), \dots, d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_n)\} - d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_j))) \|\tilde{a}_i\| \mu_i^L}{\sum_{i=1}^n (1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\max\{d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_1), d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_2), \dots, d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_n)\} - d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_j))) \|\tilde{a}_i\|} \right], \end{aligned}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n (1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\max\{d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_1), d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_2), \dots, d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_n)\} - d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_j))) \|\tilde{a}_i\| \mu_i^M}{\sum_{i=1}^n (1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\max\{d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_1), d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_2), \dots, d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_n)\} - d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_j))) \|\tilde{a}_i\| \mu_i^R} \Big] > \quad (3-27)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n (1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\max\{d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_1), d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_2), \dots, d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_n)\} - d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_j))) \|\tilde{a}_i\| \mu_i^R}{\sum_{i=1}^n (1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\max\{d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_1), d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_2), \dots, d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_n)\} - d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_j))) \|\tilde{a}_i\| \mu_i^R} \Big] >$$

其中, $\|\tilde{a}_i\| = \frac{a_i + 2b_i + c_i}{4}$ 。

3.3.2 TT2PWA 算子

定义 3-13 设 $\tilde{a}_i = \langle [a_i, b_i, c_i]; [\mu_i^L, \mu_i^M, \mu_i^R] \rangle$ 为一组二型三角模糊数, $a_i \geq 0, \mu_i^R \leq 1$, 且设 $TT2PWA: \Omega^n \rightarrow \Omega^+$, 若

$$TT2PWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \frac{\sum_{i=1}^n (\omega_i (1 + T(\tilde{a}_i)) \tilde{a}_i)}{\sum_{i=1}^n \omega_i (1 + T(\tilde{a}_i))} \quad (3-28)$$

则称 $TT2PWA$ 为二型三角模糊数的幂加权平均算子, 简称 $TT2PWA$ 算子。其中: Ω^+ 为全体正的二型三角模糊数的集合; $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$ 为 $\tilde{a}_i (i=1, 2, \dots, n)$ 的权重向量, $\omega_i \in [0, 1], \sum_{i=1}^n \omega_i = 1, i=1, \dots, n$ 。 $T(\tilde{a}_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \omega_j Sup(\tilde{a}_i, \tilde{a}_j)$ 。

重向量, $\omega_i \in [0, 1], \sum_{i=1}^n \omega_i = 1, i=1, \dots, n$ 。 $T(\tilde{a}_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \omega_j Sup(\tilde{a}_i, \tilde{a}_j)$ 。

定理 3-11 设 $\tilde{a}_i = \langle [a_i, b_i, c_i]; [\mu_i^L, \mu_i^M, \mu_i^R] \rangle$ 为一组二型三角模糊数, $a_i \geq 0, \mu_i^R \leq 1$, 则由 $TT2PWA$ 算子对 \tilde{a}_i 集结后的结果仍为二型三角模糊数, 且有:

$$TT2PWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \frac{\sum_{i=1}^n \omega_i (1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\max\{d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_1), d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_2), \dots, d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_n)\} - d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_j))) a_i}{\sum_{i=1}^n \omega_i (1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\max\{d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_1), d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_2), \dots, d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_n)\} - d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_j)))}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\sum_{i=1}^n \omega_i (1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\max\{d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_1), d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_2), \dots, d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_n)\} - d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_j))) b_i}{\sum_{i=1}^n \omega_i (1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\max\{d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_1), d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_2), \dots, d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_n)\} - d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_j)))}, \\
 & \frac{\sum_{i=1}^n \omega_i (1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\max\{d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_1), d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_2), \dots, d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_n)\} - d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_j))) c_i}{\sum_{i=1}^n \omega_i (1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\max\{d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_1), d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_2), \dots, d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_n)\} - d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_j)))}]; \\
 & \left[\frac{\sum_{i=1}^n \omega_i (1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\max\{d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_1), d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_2), \dots, d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_n)\} - d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_j))) \|\tilde{a}_i\| \mu_i^L}{\sum_{i=1}^n \omega_i (1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\max\{d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_1), d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_2), \dots, d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_n)\} - d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_j))) \|\tilde{a}_i\|} \right. \\
 & \frac{\sum_{i=1}^n \omega_i (1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\max\{d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_1), d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_2), \dots, d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_n)\} - d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_j))) \|\tilde{a}_i\| \mu_i^M}{\sum_{i=1}^n \omega_i (1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\max\{d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_1), d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_2), \dots, d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_n)\} - d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_j))) \|\tilde{a}_i\|}, \\
 & \left. \frac{\sum_{i=1}^n \omega_i (1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\max\{d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_1), d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_2), \dots, d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_n)\} - d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_j))) \|\tilde{a}_i\| \mu_i^R}{\sum_{i=1}^n \omega_i (1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\max\{d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_1), d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_2), \dots, d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_n)\} - d(\tilde{a}_i, \tilde{a}_j))) \|\tilde{a}_i\|} \right] > \quad (3-29)
 \end{aligned}$$

其中, $\|\tilde{a}_i\| = \frac{a_i + 2b_i + c_i}{4}$ 。

性质 3-8(交换性) 设 $(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n)$ 为一组二型三角模糊数, $(\tilde{a}'_1, \tilde{a}'_2, \dots, \tilde{a}'_n)$ 是 $(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n)$ 的任一排列, 则

$$TT2PWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = TT2PWA(\tilde{a}'_1, \tilde{a}'_2, \dots, \tilde{a}'_n) \quad (3-30)$$

性质 3-9(幂等性) 设 $(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n)$ 为一组二型三角模糊数, 若对于 $\forall \tilde{a}_i (i=1, 2, \dots, n)$, 均有 $\tilde{a}_i = \tilde{a}_0$, 则

$$TT2PWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \tilde{a}_0 \quad (3-31)$$

性质 3-10(有界性) 设 $(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n)$ 为一组二型三角模糊数, 其最大值为 \tilde{a}^* , 最小值为 \tilde{a}_* , 则

$$\tilde{a}_* \leq TT2PWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) \leq \tilde{a}^* \quad (3-32)$$

3.3.3 TT2POWA 算子

定义 3-14 设 $\tilde{a}_i = \langle [a_i, b_i, c_i]; [\mu_i^L, \mu_i^M, \mu_i^R] \rangle$ 为一组二型三角模糊数, $a_i \geq 0, \mu_i^R \leq 1$, 且设 $TT2POWA: \Omega^n \rightarrow \Omega^+$, 若

$$TT2POWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \frac{\sum_{i=1}^n (\varphi_i (1 + T(\tilde{b}_i)) \tilde{b}_i)}{\sum_{i=1}^n \varphi_i (1 + T(\tilde{b}_i))} \quad (3-33)$$

则称 $TT2POWA$ 为二型三角模糊数的幂有序加权平均算子, 简称 $TT2POWA$ 算子。其中: Ω^+ 为全体二型三角模糊数的集合; $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)^T$ 是与 $TT2POWA$

算子相关联的权重向量, $\varphi_i \in [0, 1]$, $\sum_{i=1}^n \varphi_i = 1$, $i = 1, \dots, n$ 。 \tilde{b}_i 为一组二型三角模

糊数 $(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n)$ 中第 i 大的元素。 $T(\tilde{b}_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \omega_j \text{Sup}(\tilde{b}_i, \tilde{b}_j)$ 。

定理 3-12 设 $\tilde{a}_i = \langle [a_i, b_i, c_i]; [\mu_i^L, \mu_i^M, \mu_i^R] \rangle$ 为一组二型三角模糊数, $a_i \geq 0, \mu_i^R \leq 1$, $\tilde{b}_i = \langle [a_{(i)}, b_{(i)}, c_{(i)}]; [\mu_{i\tilde{b}_i}^L, \mu_{i\tilde{b}_i}^M, \mu_{i\tilde{b}_i}^R] \rangle$ 为 $(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n)$ 中第 i 大的元素, 则由 $TT2POWA$ 算子对 \tilde{a}_i 集结后的结果仍为二型三角模糊数, 且有

$$\begin{aligned} TT2POWA_{\varphi}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = & \frac{\sum_{i=1}^n \varphi_i (1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\max\{d(\tilde{b}_i, \tilde{b}_1), d(\tilde{b}_i, \tilde{b}_2), \dots, d(\tilde{b}_i, \tilde{b}_n)\} - d(\tilde{b}_i, \tilde{b}_j))) a_{(i)}}{\sum_{i=1}^n \varphi_i (1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\max\{d(\tilde{b}_i, \tilde{b}_1), d(\tilde{b}_i, \tilde{b}_2), \dots, d(\tilde{b}_i, \tilde{b}_n)\} - d(\tilde{b}_i, \tilde{b}_j)))}, \\ < [& \frac{\sum_{i=1}^n \varphi_i (1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\max\{d(\tilde{b}_i, \tilde{b}_1), d(\tilde{b}_i, \tilde{b}_2), \dots, d(\tilde{b}_i, \tilde{b}_n)\} - d(\tilde{b}_i, \tilde{b}_j))) b_{(i)}}{\sum_{i=1}^n \varphi_i (1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\max\{d(\tilde{b}_i, \tilde{b}_1), d(\tilde{b}_i, \tilde{b}_2), \dots, d(\tilde{b}_i, \tilde{b}_n)\} - d(\tilde{b}_i, \tilde{b}_j)))}, \\ & \frac{\sum_{i=1}^n \varphi_i (1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\max\{d(\tilde{b}_i, \tilde{b}_1), d(\tilde{b}_i, \tilde{b}_2), \dots, d(\tilde{b}_i, \tilde{b}_n)\} - d(\tilde{b}_i, \tilde{b}_j))) c_{(i)}}{\sum_{i=1}^n \varphi_i (1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\max\{d(\tilde{b}_i, \tilde{b}_1), d(\tilde{b}_i, \tilde{b}_2), \dots, d(\tilde{b}_i, \tilde{b}_n)\} - d(\tilde{b}_i, \tilde{b}_j)))}] ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\sum_{i=1}^n \varphi_i (1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\max\{d(\tilde{b}_i, \tilde{b}_1), d(\tilde{b}_i, \tilde{b}_2), \dots, d(\tilde{b}_i, \tilde{b}_n)\} - d(\tilde{b}_i, \tilde{b}_j))) \|\tilde{b}_i\| \mu_{i\tilde{b}_i}^L}{\sum_{i=1}^n \varphi_i (1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\max\{d(\tilde{b}_i, \tilde{b}_1), d(\tilde{b}_i, \tilde{b}_2), \dots, d(\tilde{b}_i, \tilde{b}_n)\} - d(\tilde{b}_i, \tilde{b}_j))) \|\tilde{b}_i\|} \\
 & \frac{\sum_{i=1}^n \varphi_i (1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\max\{d(\tilde{b}_i, \tilde{b}_1), d(\tilde{b}_i, \tilde{b}_2), \dots, d(\tilde{b}_i, \tilde{b}_n)\} - d(\tilde{b}_i, \tilde{b}_j))) \|\tilde{b}_i\| \mu_{i\tilde{b}_i}^M}{\sum_{i=1}^n \varphi_i (1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\max\{d(\tilde{b}_i, \tilde{b}_1), d(\tilde{b}_i, \tilde{b}_2), \dots, d(\tilde{b}_i, \tilde{b}_n)\} - d(\tilde{b}_i, \tilde{b}_j))) \|\tilde{b}_i\|} \\
 & \frac{\sum_{i=1}^n \varphi_i (1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\max\{d(\tilde{b}_i, \tilde{b}_1), d(\tilde{b}_i, \tilde{b}_2), \dots, d(\tilde{b}_i, \tilde{b}_n)\} - d(\tilde{b}_i, \tilde{b}_j))) \|\tilde{b}_i\| \mu_{i\tilde{b}_i}^R}{\sum_{i=1}^n \varphi_i (1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\max\{d(\tilde{b}_i, \tilde{b}_1), d(\tilde{b}_i, \tilde{b}_2), \dots, d(\tilde{b}_i, \tilde{b}_n)\} - d(\tilde{b}_i, \tilde{b}_j))) \|\tilde{b}_i\|}] > \quad (3-34)
 \end{aligned}$$

其中, $\|\tilde{b}_i\| = \frac{a_{(i)} + 2b_{(i)} + c_{(i)}}{4}$ 。

二型三角模糊数的幂有序加权平均算子同样满足二型三角模糊数的幂加权平均算子所具有的交换性、幂等性、有界性的性质。

3.4 二型三角模糊决策信息集成算子的相关决策方法

3.4.1 基于 TT2OWA 算子的多准则决策方法

决策步骤:

设有 m 个方案 $A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$, n 个决策准则 $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$, 准则权重 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$, $\omega_i \in [0, 1]$, $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ 。决策矩阵是 $\tilde{X} = (\tilde{x}_{ij})_{m \times n}$, \tilde{x}_{ij} 是二型三角模糊数, 试选出最佳方案。决策步骤如下:

步骤 1: 在文献^[34]的规范化方法的基础上, 提出二型三角模糊数的规范化方法, 用于将决策矩阵 $\tilde{X} = (\tilde{x}_{ij})_{m \times n}$ 化为规范化决策矩阵 $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{m \times n}$, 其中 $\tilde{a} = \langle [d_j, a_j^2, a_j^3], \mu^L, \mu^M, \mu^R \rangle$ 。

对于效益型准则: $a_{ij}^k = \frac{x_{ij}^k - \min_j x_{ij}^1}{\max_j x_{ij}^3 - \min_j x_{ij}^1}$, $\mu_{\tilde{a}_{ij}}^s = \mu_{\tilde{x}_{ij}}^s$; $k = 1, 2, 3$; $s = L, M, R$ 。

对于成本型准则： $a_{ij}^k = \frac{\max_j x_{ij}^3 - x_{ij}^k}{\max_j x_{ij}^3 - \min_j x_{ij}^1}$, $\mu_{\tilde{a}_{ij}}^s = \mu_{\tilde{a}_{ij}}^s$; $k = 1, 2, 3$; $s = L, M, R$.

步骤 2:比较准则值的大小并按降序排序。

步骤 3:利用 *TT2OWA* 算子将综合决策矩阵的第 i 行元素集成, 得到方案 A_i 的综合属性值。

$$\tilde{z}_i = TT2OWA_{\omega}(\tilde{a}_{i1}, \tilde{a}_{i2}, \dots, \tilde{a}_{in}) = \sum_{j=1}^n \omega_j \tilde{b}_{ij}$$

其中, \tilde{b}_{ij} 为 $(\tilde{a}_{i1}, \tilde{a}_{i2}, \dots, \tilde{a}_{in})$ 中第 j 大的元素。

步骤 4:根据本文第二章中二型三角模糊数的记分函数计算出各方案综合属性值 \tilde{z}_i 的记分函数 $S(\tilde{z}_i)$ 。

步骤 5:根据二型三角模糊数的记分函数的比较方法对 \tilde{z}_i 进行排序, 进而得到方案的排序。

算例分析:

某企业要为其选择一位供应商, 经过初步筛选, 三位供应商 A_1, A_2, A_3 较有优势, 企业计划从其中选择一位。鉴于对企业自身的认识以及对社会影响的考虑, 企业管理层研究决定选择三位供应商中最环保的一位, 经商讨决定主要考虑 5 个效益型准则: 环保技术 C_1 , 环保材料 C_2 , 环保活动的参与度 C_3 , 精益生产情况 C_4 , 控制污染的积极性 C_5 , 准则权重 ω 分别为 0.2, 0.22, 0.21, 0.22, 0.14。决策者给出的准则值及确定程度见表 3-1。

表 3-1 决策者给出的准则值及确定程度

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	<[3.43, 4.64, 5.65]; [0.72, 0.88, 0.97]>	<[3.36, 4.71, 5.83]; [0.9, 1, 1]>	<[3.54, 4.8, 5.63]; [0.74, 0.92, 1]>	<[5.61, 6.5, 6.73]; [0.9, 1, 1]>	<[1.27, 2.12, 2.97]; [0.43, 0.63, 0.83]>
A_2	<[3.83, 5.04, 5.85]; [0.71, 0.88, 0.97]>	<[6.05, 6.73, 6.73]; [0.9, 1, 1]>	<[5.21, 6.05, 6.26]; [0.77, 0.93, 1]>	<[6.05, 6.73, 6.73]; [0.9, 1, 1]>	<[2.97, 3.67, 4.82]; [0.42, 0.62, 0.82]>
A_3	<[3.83, 4.84, 5.45]; [0.73, 0.89, 0.98]>	<[4.71, 5.83, 6.5]; [0.9, 1, 1]>	<[4.38, 5.42, 6.05]; [0.77, 0.93, 1]>	<[4.71, 5.83, 6.5]; [0.9, 1, 1]>	<[2.68, 3.53, 4.83]; [0.43, 0.63, 0.83]>

步骤 1: 由于本算例中的准则均为效益型, 且标度相同, 因此不需规范化。

步骤 2: 计算各准则值的记分函数并排序, 记分函数表如下:

表 3-2 记分函数表

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	63.1	72.6	67.4	98.8	21.5
A_2	68.1	102.3	85.7	102.3	35.9
A_3	66.4	89.2	77.4	89.2	34.8

步骤 3: 利用 $TT2OWA$ 算子计算方案 A_i 的综合属性值。

由步骤 2 得到各方案在各准则下的排序, 由 $TT2OWA$ 算子计算方案 A_i 的综合属性值 \tilde{z}_i 为:

$$\tilde{z}_1 = \langle [3.57, 4.71, 5.52]; [0.8, 0.92, 0.98] \rangle;$$

$$\tilde{z}_2 = \langle [4.94, 5.78, 6.06]; [0.79, 0.92, 0.98] \rangle;$$

$$\tilde{z}_3 = \langle [4.16, 5.2, 5.83]; [0.79, 0.93, 0.98] \rangle.$$

步骤 4: 计算各方案综合属性值 \tilde{z}_i 的记分函数 $S(\tilde{z}_i)$:

$$S(\tilde{z}_1) = 67; S(\tilde{z}_2) = 81.6; S(\tilde{z}_3) = 73.9.$$

步骤 5: 方案排序。

对记分函数进行排序: $S(\tilde{z}_2) > S(\tilde{z}_3) > S(\tilde{z}_1)$, 因此方案的排序为: $A_2 \succ A_3 \succ A_1$, 最佳选择为供应商 A_2 。

3.4.2 基于 $ITT2OWA$ 算子的多准则决策方法

决策步骤:

对于一多准则决策问题, 设有 m 个方案 $A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$, n 个决策准则 $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$, 准则权重 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$, $\omega_i \in [0, 1]$, $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ 。决策者以二型三角模糊数的形式给出方案的准则值, 试选出最佳方案。决策步骤如下:

步骤 1: 构造决策矩阵 $\tilde{X} = (\tilde{x}_{ij})_{m \times n}$, 并化为规范化决策矩阵 $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{m \times n}$, 其中

$$\tilde{a} = \langle [a_{ij}^1, a_{ij}^2, a_{ij}^3]; [\mu_{ij}^L, \mu_{ij}^M, \mu_{ij}^R] \rangle.$$

$$\text{对于效益型准则: } a_{ij}^k = \frac{x_{ij}^k - \min_j x_{ij}^1}{\max_j x_{ij}^3 - \min_j x_{ij}^1}, \mu_{\tilde{a}_{ij}}^s = \mu_{\tilde{x}_{ij}}^s; k = 1, 2, 3; s = L, M, R.$$

$$\text{对于成本型准则: } a_{ij}^k = \frac{\max_j x_{ij}^3 - x_{ij}^k}{\max_j x_{ij}^3 - \min_j x_{ij}^1}, \mu_{\tilde{a}_{ij}}^s = \mu_{\tilde{x}_{ij}}^s; k = 1, 2, 3; s = L, M, R.$$

步骤 2: 在决策中, 准则的确定程度也应该予以考虑, 这里给出使用二型三角诱导 OWA 算子进行决策的方法, 诱导变量为准则的信心水平 β_i , 表示对准则的确定程度。计算方案 \tilde{a}_i 的信心水平 $\beta_i = \mu_i^L + 2\mu_i^M + \mu_i^R$, 得到信心水平矩阵。

步骤 3: 利用二型三角诱导 OWA 算子对方案 \tilde{a}_i 的准则值进行集结, 得到方

案 \tilde{a}_i 的综合准则值 $\tilde{z}_i = ITT2OWA_{\omega}(\tilde{a}_{ij}) = \sum_{j=1}^n \omega_j \tilde{a}_{i\theta(j)}$ ，其中 $\theta(j)$ 是信心水平

$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 中第 j 大的元素所对应的下标。

步骤 4: 利用 2.2.4 节中的可能度公式进行两两比较，得到 \tilde{z}_i 的排序，进而得到方案的排序。

算例分析：

某企业要为其选择一位供应商，经过初步筛选，三位供应商 A_1, A_2, A_3 较有优势，企业计划从其中选择一位。鉴于对企业自身的认识以及对社会影响的考虑，企业管理层研究决定选择三位供应商中最环保的一位，经商讨决定主要考虑 5 个效益型准则：环保技术 C_1 ，环保材料 C_2 ，环保活动的参与度 C_3 ，精益生产情况 C_4 ，控制污染的积极性 C_5 ，准则权重为 0.16,0.25,0.15,0.32,0.12。决策者以二型三角模糊数的形式给出自己的判断以及判断的确定程度，决策信息见表 3-3。

表 3-3 方案的准则值

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	$\langle [5,7,9]; [0.7, 0.9, 1.0] \rangle$	$\langle [7,9,10]; [0.5, 0.7, 0.8] \rangle$	$\langle [4,7,8]; [0.5, 0.7, 1] \rangle$	$\langle [9,10,10]; [0.9, 1.0, 1.0] \rangle$	$\langle [7,8,10]; [0.5, 0.7, 0.9] \rangle$
A_2	$\langle [7,9,10]; [0.6, 0.8, 0.9] \rangle$	$\langle [9,10,10]; [0.6, 0.8, 1] \rangle$	$\langle [9,10,10]; [0.6, 0.7, 0.8] \rangle$	$\langle [9,10,10]; [0.8, 0.9, 1.0] \rangle$	$\langle [9,10,10]; [0.3, 0.5, 0.7] \rangle$
A_3	$\langle [9,10,10]; [0.4, 0.9, 1.0] \rangle$	$\langle [5,7,9]; [0.4, 0.7, 0.8] \rangle$	$\langle [7,9,10]; [0.6, 0.9, 1] \rangle$	$\langle [7,9,10]; [0.9, 1.0, 1.0] \rangle$	$\langle [7,9,10]; [0.6, 0.7, 0.8] \rangle$

步骤 1: 由于本算例中的准则均为效益型，且标度相同，因此不需规范化。

步骤 2: 计算方案 A_i 在各准则下的信心水平，得到信心水平表见表 3-4。

表 3-4 信心水平表

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	3.5	2.7	2.9	3.9	2.8
A_2	3.1	3.2	2.8	3.6	2
A_3	3.2	2.6	3.4	3.9	2.8

步骤 3: 利用 $ITT2OWA$ 算子对方案 A_i 的准则值进行集结，得到 A_i 的综合准则值 \tilde{z}_i ：

$$\tilde{z}_1 = \langle [6.4, 8.0, 9.5]; [0.62, 0.8, 0.94] \rangle;$$

$$\tilde{z}_2 = \langle [8.7, 9.9, 10]; [0.6, 0.7, 0.88] \rangle;$$

$$\tilde{z}_3 = \langle [7.1, 8.9, 9.9]; [0.6, 0.8, 0.92] \rangle.$$

步骤 4: 利用可能度公式比较：

$$P(\tilde{z}_1 \geq \tilde{z}_2)=0.016, P(\tilde{z}_2 \geq \tilde{z}_3)=0.65, P(\tilde{z}_1 \geq \tilde{z}_3)=0.25,$$

进而可知： $\tilde{z}_1 < \tilde{z}_2$ ， $\tilde{z}_2 \geq \tilde{z}_3$ ， $\tilde{z}_1 < \tilde{z}_3$ ，因此方案的排序为： $A_2 \succ A_3 \succ A_1$ 。最佳选择为供应商 A_2 。

3.4.3 基于 TT2WAA 算子和 TT2OWA 算子的多准则决策方法

决策步骤：

设有 m 个方案 $A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ ， n 个决策准则 $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ ，准则权重 $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)^T$ ， $\eta_j \in [0, 1]$ 且 $\sum_{j=1}^n \eta_j = 1 (j=1, 2, \dots, n)$ 。假设共有 g 个决策者参与决策，决策者权重为 $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_g)^T$ ， $\beta_l \in [0, 1]$ 且 $\sum_{l=1}^g \beta_l = 1 (l=1, 2, \dots, n)$ 。第 d 个决策者给出的决策矩阵是 $\tilde{X}_d = (\tilde{x}_{ij}^{(d)})_{m \times n}$ ， $\tilde{x}_{ij}^{(d)}$ 是二型三角模糊数。试选出最佳方案，决策步骤如下：

步骤 1: 将决策矩阵 \tilde{X}_d 化为规范化决策矩阵 $\tilde{A}_d = (\tilde{a}_{ij}^{(d)})_{m \times n}$ ，其中 $\tilde{a} = \langle [q_j^1, a_{i,p}^2, a_{i,j}^3], \mu_{i,j}^L, \mu_{i,j}^M, \mu_{i,j}^R \rangle$ 。

对于效益型准则：
$$a_{ij}^k = \frac{x_{ij}^k - \min_j x_{ij}^1}{\max_j x_{ij}^3 - \min_j x_{ij}^1}, \mu_{ij}^s = \mu_{ij}^s; s = L, M, R.$$

对于成本型准则：
$$a_{ij}^k = \frac{\max_j x_{ij}^3 - x_{ij}^k}{\max_j x_{ij}^3 - \min_j x_{ij}^1}, \mu_{ij}^s = \mu_{ij}^s; s = L, M, R.$$

步骤 2: 利用 TT2WAA 算子对不同决策者给出的决策矩阵进行集结，得到综合决策矩阵 $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{m \times n}$ ， $\tilde{a}_{ij} = TT2WAA_{\beta}(\tilde{a}_{ij}^{(1)}, \dots, \tilde{a}_{ij}^{(k)}) = \sum_{d=1}^k \beta_d \tilde{a}_{ij}^{(d)}$ 。

步骤 3: 利用 TT2OWA 算子将综合决策矩阵的第 i 行元素集成，得到方案 A_i 的综合属性值。

$$\tilde{z}_i = TT2OWA_{\eta}(\tilde{a}_{i1}, \tilde{a}_{i2}, \dots, \tilde{a}_{in}) = \sum_{j=1}^n \eta_j \tilde{b}_{ij}$$

其中， \tilde{b}_{ij} 为 $(\tilde{a}_{i1}, \tilde{a}_{i2}, \dots, \tilde{a}_{in})$ 中第 j 大的元素。

步骤 4: 根据本文第二章中二型三角模糊数的记分函数计算出各方案综合属性值 \tilde{z}_i 的记分函数 $S(\tilde{z}_i)$ 。

步骤 5: 根据二型三角模糊数的记分函数的比较方法对 \tilde{z}_i 进行排序，进而得到方案的排序。

算例分析：

某企业要为其选择一位供应商，经过初步筛选，三位供应商 A_1, A_2, A_3 较有优势，企业计划从其中选择一位。鉴于对企业自身的认识以及对社会影响的考虑，企业管理层研究决定选择三位供应商中最环保的一位，经商讨决定主要考虑 5 个效益型准则：环保技术 C_1 ，环保材料 C_2 ，环保活动的参与度 C_3 ，精益生产情况

C_4 ，控制污染的积极性 C_5 ，准则的重要程度分别为：高、非常高、非常高、非常高、中等。决策者以语言值的形式给出自己的判断以及判断的确定程度，准则分为：非常差、差、较差、中等、较好、好、非常好共七个档次，确定程度分为：非常低、低、较低、中等、较高、高、非常高七个档次。准则权重 ω 分别为 0.2,0.22,0.21,0.22,0.14，决策者权重为 0.33,0.34,0.33。各决策者给出的准则值及确定程度见表 3-5-表 3-7。

表 3-5 决策者 d_1 给出的准则值及确定程度

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	MG,H	G,VH	F,VH	VG,VH	F,M
A_2	G,H	VG,VH	VG,VH	VG,VH	VG,M
A_3	VG,H	MG,VH	G,VH	G,VH	G,M

表 3-6 决策者 d_2 给出的准则值及确定程度

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	G,VH	MG,VH	G,H	G,VH	F,MH
A_2	G,VH	VG,VH	VG,H	VG,VH	MG,MH
A_3	G,VH	G,VH	MG,H	VG,VH	G,MH

表 3-7 决策者 d_3 给出的准则值及确定程度

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	MG,MH	F,VH	G,H	VG,VH	F,MH
A_2	MG,MH	VG,VH	G,H	VG,VH	G,MH
A_3	F,MH	VG,VH	VG,H	MG,VH	MG,MH

步骤 1:利用文献[117]中给出的转化表(见表 3-8、表 3-9)，将表 3-5-表 3-7 中的语言值转化为二型三角模糊数，转化后的准则值见表 3-10-表 3-12:

表 3-8 准则值的语言值

非常差(VP)	[0,0,1]
差(P)	[0,1,3]
较差(MP)	[1,3,5]
一般(F)	[3,5,7]
较好(MG)	[5,7,9]
好(G)	[7,9,10]
非常好(VG)	[9,10,10]

表 3-9 确定程度的语言值

非常低(VL)	[0,0,0.1]
低(L)	[0,0.1,0.3]
较低(ML)	[0.1,0.3,0.5]
中等(M)	[0.3,0.5,0.7]
较高(MH)	[0.5,0.7,0.9]
高(H)	[0.7,0.9,1.0]
非常高(VH)	[0.9,1.0,1.0]

表 3-10 决策者 d_1 转化后的准则值

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	<[5,7,9]; [0.7,0.9,1.0]>	<[7,9,10]; [0.9,1.0,1.0]>	<[3,5,7]; [0.9,1.0,1.0]>	<[9,10,10]; [0.9,1.0,1.0]>	<[3,5,7]; [0.3,0.5,0.7]>
A_2	<[7,9,10]; [0.7,0.9,1.0]>	<[9,10,10]; [0.9,1.0,1.0]>	<[9,10,10]; [0.9,1.0,1.0]>	<[9,10,10]; [0.9,1.0,1.0]>	<[9,10,10]; [0.3,0.5,0.7]>
A_3	<[9,10,10]; [0.7,0.9,1.0]>	<[5,7,9]; [0.9,1.0,1.0]>	<[7,9,10]; [0.9,1.0,1.0]>	<[7,9,10]; [0.9,1.0,1.0]>	<[7,9,10]; [0.3,0.5,0.7]>

表 3-11 决策者 d_2 转化后的准则值

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	<[7,9,10]; [0.9,1.0,1.0]>	<[5,7,9]; [0.9,1.0,1.0]>	<[7,9,10]; [0.7,0.9,1.0]>	<[7,9,10]; [0.9,1.0,1.0]>	<[3,5,7]; [0.5,0.7,0.9]>
A_2	<[7,9,10]; [0.9,1.0,1.0]>	<[9,10,10]; [0.9,1.0,1.0]>	<[9,10,10]; [0.7,0.9,1.0]>	<[9,10,10]; [0.9,1.0,1.0]>	<[5,7,9]; [0.5,0.7,0.9]>
A_3	<[7,9,10]; [0.9,1.0,1.0]>	<[7,9,10]; [0.9,1.0,1.0]>	<[5,7,9]; [0.7,0.9,1.0]>	<[9,10,10]; [0.9,1.0,1.0]>	<[7,9,10]; [0.5,0.7,0.9]>

表 3-12 决策者 d_3 转化后的准则值

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	<[5,7,9]; [0.5,0.7,0.9]>	<[3,5,7]; [0.9,1.0,1.0]>	<[7,9,10]; [0.7,0.9,1.0]>	<[9,10,10]; [0.9,1.0,1.0]>	<[3,5,7]; [0.5,0.7,0.9]>
A_2	<[5,7,9]; [0.5,0.7,0.9]>	<[9,10,10]; [0.9,1.0,1.0]>	<[7,9,10]; [0.7,0.9,1.0]>	<[9,10,10]; [0.9,1.0,1.0]>	<[7,9,10]; [0.5,0.7,0.9]>
A_3	<[3,5,7]; [0.5,0.7,0.9]>	<[9,10,10]; [0.9,1.0,1.0]>	<[9,10,10]; [0.7,0.9,1.0]>	<[5,7,9]; [0.9,1.0,1.0]>	<[5,7,9]; [0.5,0.7,0.9]>

步骤 2: 由于本算例中的准则均为效益型，且标度相同，因此不需规范化。利用 $TT2WAA$ 算子对不同决策者给出的决策矩阵进行集结，得到综合决策矩阵见表 3-13:

表 3-13 综合决策表

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	$\langle [3.43, 4.64, 5.65]; [0.72, 0.88, 0.97] \rangle$	$\langle [3.36, 4.71, 5.83]; [0.9, 1, 1] \rangle$	$\langle [3.54, 4.8, 5.63]; [0.74, 0.92, 1] \rangle$	$\langle [5.61, 6.5, 6.73]; [0.9, 1, 1] \rangle$	$\langle [1.27, 2.12, 2.97]; [0.43, 0.63, 0.83] \rangle$
A_2	$\langle [3.83, 5.04, 5.85]; [0.71, 0.88, 0.97] \rangle$	$\langle [6.05, 6.73, 6.73]; [0.9, 1, 1] \rangle$	$\langle [5.21, 6.05, 6.26]; [0.77, 0.9, 1] \rangle$	$\langle [6.05, 6.73, 6.73]; [0.9, 1, 1] \rangle$	$\langle [2.97, 3.67, 4.1]; [0.42, 0.62, 0.82] \rangle$
A_3	$\langle [3.83, 4.84, 5.45]; [0.73, 0.89, 0.98] \rangle$	$\langle [4.71, 5.83, 6.5]; [0.9, 1, 1] \rangle$	$\langle [4.38, 5.42, 6.05]; [0.77, 0.9, 1] \rangle$	$\langle [4.71, 5.83, 6.5]; [0.9, 1, 1] \rangle$	$\langle [2.68, 3.53, 4.1]; [0.43, 0.63, 0.83] \rangle$

步骤 3: 计算各准则值的记分函数并排序，进而利用 $TT2OWA$ 算子计算方案 A_i 的综合属性值，记分函数表如下:

表 3-14 记分函数表

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	63.1	72.6	67.4	98.8	21.5
A_2	68.1	102.3	85.7	102.3	35.9
A_3	66.4	89.2	77.4	89.2	34.8

由此得到各方案在各准则下的排序，由 $TT2OWA$ 算子计算方案 A_i 的综合属性值 \tilde{z}_i 为:

$$\tilde{z}_1 = \langle [3.57, 4.71, 5.52]; [0.8, 0.92, 0.98] \rangle;$$

$$\tilde{z}_2 = \langle [4.94, 5.78, 6.06]; [0.79, 0.92, 0.98] \rangle;$$

$$\tilde{z}_3 = \langle [4.16, 5.2, 5.83]; [0.79, 0.93, 0.98] \rangle.$$

步骤 4: 计算各方案综合属性值 \tilde{z}_i 的记分函数 $S(\tilde{z}_i)$:

$$S(\tilde{z}_1) = 67; S(\tilde{z}_2) = 81.6; S(\tilde{z}_3) = 73.9.$$

步骤 5: 方案排序。

对记分函数进行排序: $S(\tilde{z}_2) > S(\tilde{z}_3) > S(\tilde{z}_1)$ ，方案的排序为: $A_2 \succ A_3 \succ A_1$ 。

本算例考虑了决策者的确定程度，当决策者对各准则值的确定程度相差较大时，本节中提出的方法可以涵盖更多信息，更贴合现实情况、符合思维习惯，有利于减少决策误差。

3.5 本章小结

本章首先将经典的 OWA 算子引入二型三角模糊决策信息集成方法中, 根据 OWA 算子及其相关扩展算子, 定义了二型三角模糊数的有序加权平均算子 ($TT2OWA$ 算子)等和性算子及它们的积性扩展, 并给出准则间有关联时的二型三角模糊算子等算子。

随后, 给出这些和性算子的积性扩展, 如二型三角模糊有序加权几何平均算子 ($TT2OWG$ 算子)等, 详细分析了它们的性质, 并讨论了信息关联时处理关联信息的二型三角模糊幂平均算子 ($TT2PA$ 算子)等算子, 以期根据不同的决策信息选用不同的算子, 解决多准则决策中的信息集结问题。最后, 本章将前面提到的一些算子应用于多准则决策, 给出这些算子在多准则决策方法中的应用。

第四章 基于二型三角模糊数的多准则决策方法

经过上一章的研究，现在已经了解了二型三角模糊决策信息集成方法。这些集成方法使得用二型三角模糊数来解决多准则决策问题成为可能。本章即尝试达到此目标。本章给出三种基于二型三角模糊数的多准则决策方法：基于聚类的二型三角模糊多准则决策方法、基于后悔理论的二型三角模糊多准则决策方法和基于理想点的二型三角模糊多准则决策方法。

现实的决策问题中，准则权重常常是未知的，但是本章将专注于研究多准则决策方法，为了节约研究准则权重所需要的投入，本章中的三种决策方法均假设准则权重是已知的。为了使本章中的方法与现实问题没有脱节，本章在第一节中给出求解决策权重的方法，以将准则权重未知的现实问题(如第五章中的绿色供应商选择问题)转化为适用于本章中决策方法的问题。

4.1 处理决策信息权重的方法

现实生活中，各决策信息的相对重要性难以确定，因此如何赋权以达到减少未知信息、增加决策精确性的目的，成为了一个值得不断探索的领域。经过对主观赋权法、客观赋权法以及组合赋权法的研究，本节中给出两种求解权重的方法。

4.1.1 综合隶属系数最大化方法

二型三角模糊数相较于普通模糊数多了隶属度的概念，且其隶属度也是模糊数，在此方法中用以刻画决策者对某准则的确信程度，若总体而言，决策者给出的判断矩阵中某准则的隶属度越大越精确，表明这一准则更加清晰准确，更加确定，以其为参考来做决策，就易于减少误差和失误，那么这一准则应该被赋予越大的权重，相反的，如果某准则隶属度很小且模糊，那么以其为参考就容易进入误区，应该赋予较小的权重。因此使用以下方式计算各准则的客观权重：

对于某准则 C_j ，定义其隶属度 $[\mu_{ij}^L, \mu_{ij}^M, \mu_{ij}^R]$ 的隶属系数为 $\frac{\mu_{ij}^L + 2\mu_{ij}^M + \mu_{ij}^R}{4}$ ，可见隶属度越大，隶属系数越大。某准则 C_j 的综合隶属系数 $W_j = \sum_{i=1}^m \frac{\mu_{ij}^L + 2\mu_{ij}^M + \mu_{ij}^R}{4}$ ，

$j = (1, \dots, n)$ 。特别的，如果二型三角模糊数变为三角模糊数，这时所有的准则就具有相同的权重，因为它们的确信程度都是相同的，后面的最优解也刚好包含了

这一结论在内。

根据以上分析，准则权重应使所有决策者的综合隶属系数之加权和最大。所以，求解准则权重的问题转化为求解下述模型的最优解：

$$\begin{aligned} \max W(\beta) &= \sum_{j=1}^n \beta_j W_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \frac{\mu_{ij}^L + 2\mu_{ij}^M + \mu_{ij}^R}{4} \beta_j \\ \text{s.t. } &\sum_{j=1}^n \beta_j^2 = 1 \\ &\beta_j \geq 0, j=1, \dots, n \end{aligned}$$

为解此最优化模型，作拉格朗日函数，令

$$L(\beta, \lambda) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \frac{\mu_{ij}^L + 2\mu_{ij}^M + \mu_{ij}^R}{4} \beta_j + \frac{1}{2} \lambda (\sum_{j=1}^n \beta_j^2 - 1)$$

求偏导数，并令

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \beta_j} = \sum_{i=1}^m \frac{\mu_{ij}^L + 2\mu_{ij}^M + \mu_{ij}^R}{4} + \lambda \beta_j = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \sum_{j=1}^n \beta_j^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

求得最优解 $\beta_j^* = \frac{\sum_{i=1}^m \frac{\mu_{ij}^L + 2\mu_{ij}^M + \mu_{ij}^R}{4}}{\sqrt{\sum_{j=1}^n [\sum_{i=1}^m \frac{\mu_{ij}^L + 2\mu_{ij}^M + \mu_{ij}^R}{4}]^2}}$, $j = (1, \dots, n)$;

对上述结果归一化处理，即进行如下转换：

$$\beta_j = \frac{\beta_j^*}{\sum_{j=1}^n \beta_j^*}, \quad j = (1, \dots, n);$$

由此得到

$$\beta_j = \frac{\sum_{i=1}^m \frac{\mu_{ij}^L + 2\mu_{ij}^M + \mu_{ij}^R}{4}}{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \frac{\mu_{ij}^L + 2\mu_{ij}^M + \mu_{ij}^R}{4}}, \quad j = (1, \dots, n) \quad (4-1)$$

如果决策问题中含有各准则的主观权重 δ_d ，那么我们可以将客观权重和主观权重进行结合，得到更合理的权重。结合方式如下：

$$\eta_d^* = \sqrt{\beta_d \times \delta_d};$$

对其归一化处理

$$\eta_d = \frac{\eta_d^*}{\sum_{d=1}^k \eta_d^*}, \quad d = (1, \dots, k);$$

得到

$$\eta_d = \frac{\sqrt{\beta_d \times \delta_d}}{\sum_{d=1}^k \sqrt{\beta_d \times \delta_d}}, \quad d = (1, \dots, k), \quad (4-2)$$

特别的，如果二型三角模糊数化为三角模糊数，那么决策者对所有的准则具有相同的确信程度。这时， $\beta_d = 1/k, d = 1, \dots, k$ ，准则权重仅依赖于主观权重。这种情况是上述模型的特例。

该方法可以扩展到求解群决策问题中的决策者权重。隶属度表示决策者对其判断的确信程度，若决策者 d 给出的判断矩阵中各值的隶属度越大，表明决策者 d 对这一决策问题有更多的知识，更加确定，那么决策者 d 应该被赋予越大的权重，因此使用以下方式计算属性的权重：

对于决策者 d ，定义其对于判断的隶属系数为 $\frac{\mu_{ij}^{L(d)} + 2\mu_{ij}^{M(d)} + \mu_{ij}^{R(d)}}{4}$ 。可见隶属度越大，隶属系数越大。决策者 d 的综合隶属系数是：

$$W_d = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\mu_{ij}^{L(d)} + 2\mu_{ij}^{M(d)} + \mu_{ij}^{R(d)}}{4}, \quad d = (1, \dots, k)。$$

特别的，如果二型三角模糊数变为三角模糊数，这时所有的决策者就具有相同的决策权重，因为他们对自己判断的确信程度都是相同的，后面的最优解也刚好包含了这一结论在内。

根据以上分析，决策者的权重应使所有决策者的综合隶属系数之加权和最大。所以，求解决策者权重的问题转化为求解下述模型的最优解：

$$\begin{aligned} \max W(\beta) &= \sum_{d=1}^k \beta_d W_d = \sum_{d=1}^k \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\mu_{ij}^{L(d)} + 2\mu_{ij}^{M(d)} + \mu_{ij}^{R(d)}}{4} \beta_d \\ \text{s.t.} \quad &\sum_{d=1}^k \beta_d^2 = 1 \\ &\beta_d \geq 0, d = 1, \dots, k \end{aligned}$$

为解此最优化模型，作拉格朗日函数，令

$$L(\beta, \lambda) = \sum_{d=1}^k \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\mu_{ij}^{L(d)} + 2\mu_{ij}^{M(d)} + \mu_{ij}^{R(d)}}{4} \beta_d + \frac{1}{2} \lambda (\sum_{d=1}^k \beta_d^2 - 1)$$

$$\text{求偏导数，并令} \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \beta_j} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\mu_{ij}^{L(d)} + 2\mu_{ij}^{M(d)} + \mu_{ij}^{R(d)}}{4} + \lambda \beta_d = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \sum_{d=1}^k \beta_d^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{求得最优解 } \beta_d^* = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\mu_{ij}^{L(d)} + 2\mu_{ij}^{M(d)} + \mu_{ij}^{R(d)}}{4}}{\sqrt{\sum_{d=1}^k [\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\mu_{ij}^{L(d)} + 2\mu_{ij}^{M(d)} + \mu_{ij}^{R(d)}}{4}]^2}}, \quad d = (1, \dots, k);$$

对上述结果归一化处理，即进行如下转换：

$$\beta_d = \frac{\beta_d^*}{\sum_{d=1}^k \beta_d^*}, \quad d = (1, \dots, k);$$

由此得到

$$\beta_d = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\mu_{ij}^{L(d)} + 2\mu_{ij}^{M(d)} + \mu_{ij}^{R(d)}}{4}}{\sum_{d=1}^k \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\mu_{ij}^{L(d)} + 2\mu_{ij}^{M(d)} + \mu_{ij}^{R(d)}}{4}}, \quad d = (1, \dots, k). \quad (4-3)$$

同样的，如果决策问题中含有各决策者的主观权重 δ_d ，那么我们可以将客观权重和主观权重进行结合，得到更合理的权重。结合方式如下：

$$\eta_d^* = \sqrt{\beta_d \times \delta_d};$$

对其归一化处理

$$\eta_d = \frac{\eta_d^*}{\sum_{d=1}^k \eta_d^*}, \quad d = (1, \dots, k);$$

得到

$$\eta_d = \frac{\sqrt{\beta_d \times \delta_d}}{\sum_{d=1}^k \sqrt{\beta_d \times \delta_d}}, \quad d = (1, \dots, k). \quad (4-4)$$

这一方法是在文^[118]中所提方法的扩展。

4.1.2 特征权值方法

特征权值计算方法是文本聚类问题中很重要的一步，用 $D = \{d_1, d_2, \dots, d_m\}$ 表示文档集， $F = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ 表示特征集，特征 f_i 在文档 d_j 中出现的次数称作特征项频率(Term Frequency)，记为 $TF(f_i, d_j)$ ，归一化频率得到：

$$tf(f_i, d_j) = \frac{TF(f_i, d_j)}{\max_k TF(f_k, d_j)}$$

令 $DF(f_i)$ 表示文档集 D 中含有特征 f_i 的文档总数，逆文档频率(Inverse Document Frequency)定义如下：

$$IDF(f_i) = (\log \frac{m}{DF(f_i)})$$

m 表示文档集中的文档数目。 IDF 值越高表示索引项在文档集中出现的频率越小。该方法采用 $TF \times IDF$ 来计算权值, 用 w_{ij} 表示, 计算公式是:

$$w_{ij} = tf(f_i, d_j) \times IDF(f_i) = \frac{TF(f_i, d_j)}{\max_k TF(f_k, d_j)} \times (\log \frac{m}{DF(f_i)})$$

该方法的本质是考虑影响权值的两方面因素: 特征 f_i 在文档 d_j 中出现的频率越高, 那么此特征越能表示该文档的内容, 权值越大, 同时, 含有特征 f_i 的文档数越少, 那么表明该特征区分相似文档的能力越强, 权值越大, 为了取得两方面的平衡, 该方法求两项的积。

将特征权值方法的两方面思想应用到多准则决策领域, 设决策问题含有 m 个方案, n 个准则, 类比于特征权值方法的思想, 同时综合二型三角模糊数的特点, 权重计算考虑两个方面的问题: 准则 j 在方案中的隶属度越大, 那么此准则越能体现该方案的特点, 权重越大, 同时, 各方案在准则 j 下的区分度越大, 那么表明该准则区分方案的能力越强, 权重越大。因此定义准则权重计算方法如下:

设多准则决策问题的准则是一组二型三角模糊数 $\tilde{a}_i = \{ a_i, b_i, c_i \}; \mu_i^L, \mu_i^M, \mu_i^R$, 那么准则权重计算公式如下:

$$\omega_j = (\mu_j^L + 2\mu_j^M + \mu_j^R) \times \sum_{k=1}^m (|a_{ij} - a_{kj}| + |b_{ij} - b_{kj}| + |c_{ij} - c_{kj}|);$$

准则 j 的权重是:

$$\omega_j^* = \sum_{i=1}^m ((\mu_{ij}^L + 2\mu_{ij}^M + \mu_{ij}^R) \times \sum_{k=1}^m (|a_{ij} - a_{kj}| + |b_{ij} - b_{kj}| + |c_{ij} - c_{kj}|));$$

归一化权重, 即令

$$\omega_j = \frac{\omega_j^*}{\sum_{j=1}^n \omega_j^*},$$

由此得到

$$\omega_j = \frac{\sum_{i=1}^m ((\mu_{ij}^L + 2\mu_{ij}^M + \mu_{ij}^R) \times \sum_{k=1}^m (|a_{ij} - a_{kj}| + |b_{ij} - b_{kj}| + |c_{ij} - c_{kj}|))}{\sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^m ((\mu_{ij}^L + 2\mu_{ij}^M + \mu_{ij}^R) \times \sum_{k=1}^m (|a_{ij} - a_{kj}| + |b_{ij} - b_{kj}| + |c_{ij} - c_{kj}|)))} \quad (4-5)$$

上面讨论了处理决策信息权重的方法, 通过上述方法可以使未知的权重信息转变为已知信息, 鉴于此, 以下的决策方法中将假设所有权重已知, 节约了处理决策权重的步骤, 从而将精力专注于决策方法上, 力求得到最优的结果。

4.2 基于聚类的二型三角模糊多准则决策方法

4.2.1 问题描述

在一些实际的决策问题中，单一的综合属性值常常不能完全反应方案的特征，因此有必要考虑多方面的属性值，通过聚类分析来寻找最优方案。设有 m 个方案 $A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ ， n 个决策准则 $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ ，准则权重 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$ ， $\omega_i \in [0, 1]$ ， $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ 。决策矩阵是 $\tilde{X} = (\tilde{x}_{ij})_{m \times n}$ ， \tilde{x}_{ij} 是二型三角模糊数，试选出最佳方案。

4.2.2 决策步骤

步骤 1: 将决策矩阵 $\tilde{X} = (\tilde{x}_{ij})_{m \times n}$ 化为规范化决策矩阵 $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{m \times n}$ ，其中 $\tilde{a} = \langle [a_{ij}^L, a_{ij}^M, a_{ij}^R]; \mu_{ij}^L, \mu_{ij}^M, \mu_{ij}^R \rangle$ 。

对于效益型准则：
$$a_{ij}^k = \frac{x_{ij}^k - \min_j x_{ij}^1}{\max_j x_{ij}^3 - \min_j x_{ij}^1}, \mu_{\tilde{a}_{ij}}^s = \mu_{\tilde{x}_{ij}}^s; k = 1, 2, 3; s = L, M, R.$$

对于成本型准则：
$$a_{ij}^k = \frac{\max_j x_{ij}^3 - x_{ij}^k}{\max_j x_{ij}^3 - \min_j x_{ij}^1}, \mu_{\tilde{a}_{ij}}^s = \mu_{\tilde{x}_{ij}}^s; k = 1, 2, 3; s = L, M, R.$$

步骤 2: 确定每一准则下的相对理想方案 A_j^+ 和相对负理想方案 A_j^- ；

根据可能度公式两两比较，得到可能度矩阵 $\tilde{P} = [\tilde{p}_{ij}]_{m \times m}$ ，从而得到每一准则下的相对理想方案 A_j^+ 和相对负理想方案 A_j^- 。

步骤 3: 计算各备选方案的整体效益值 S_i 和个别遗憾值 R_i ；

$$S_i = \sum_{j=1}^n \omega_j (A_j^+ - A) / (A_j^- - A) \quad (4-6)$$

$$R_i = \max_j (A_j^+ - A) / (A_j^- - A) \quad (4-7)$$

ω_j 表示第 j 个准则的权重， S_i 值越小则整体效益越大， R_i 值越小则个别遗憾越小。

步骤 4: 根据可能度公式比较得出 S_i 中的最小值 S^* 和最大值 S_* ，也就是分别使整体效益最大和最小的值；根据可能度公式比较得出 R_i 中的最小值 R^* 和最大值 R_* ，也就是分别使个别遗憾最小和最大的值。

步骤 5: 可见 S_i 值越小， R_i 值越小，方案越优，因此设理想方案 $T^* = (S^*, R^*)$ ，负理想方案 $T_* = (S_*, R_*)$ 。将原方案集中的方案表示为 $T_i = (S_i, R_i)$ 的形式，并将这

两个假设的方案加入原方案集中得到新方案集 $\{T_1, \dots, T_m, T^*, T_*\}$ 。

步骤 6: 计算新方案集中方案间的相似度, 得到相似度矩阵 $\tilde{B} = [b_{pq}]_{(m+2) \times (m+2)}$, 计算公式为:

$$b_{pq} = \frac{2 - d(S_p, S_q) - d(R_p, R_q)}{2} \quad (4-8)$$

其中 $d(p, q)$ 表示 p, q 间的差距。

步骤 7: 显然矩阵 $\tilde{B} = [b_{pq}]_{m \times n}$ 主对角线上的元素为 1 且转置后矩阵不变, 即其具有自反性和对称性。若 $\tilde{B}^2 \subset \tilde{B}$, 则称其为模糊等价矩阵, 继续进行如下运算:

- 1) 将矩阵 $\tilde{B} = [b_{pq}]_{m \times n}$ 中的元素按照从大到小排序为 $1, b_{pq}^1, b_{pq}^2, \dots, b_{pq}^{\frac{(m+2)(m+1)}{2}}$;
- 2) 取 $b_{pq}^1 < \lambda \leq 1$, 对各方案进行归类得 \tilde{B}_λ , 进而对方案进行归类;
- 3) 取 $b_{pq}^2 < \lambda \leq b_{pq}^1$, 对各方案进行归类; 以此类推……

最先与理想方案 T^* 聚为一类的为最优方案, 如果同时有多个方案与理想方案聚为一类, 则从其中选择最晚与负理想方案 T_* 聚为一类的方案。

若 $\tilde{B}^2 \not\subset \tilde{B}$, 不是模糊等价矩阵, 进行如下复合运算:

$$\tilde{B} \rightarrow \tilde{B}^2 = \tilde{B} \circ \tilde{B} \rightarrow \tilde{B}^4 = \tilde{B}^2 \circ \tilde{B}^2 \rightarrow \dots \rightarrow \tilde{B}^{2k} = \tilde{B}^k \circ \tilde{B}^k$$

若存在正整数 k , 使得 $\tilde{B}^{2k} = \tilde{B}^k$, 则 \tilde{B}^{2k} 是模糊等价矩阵, 通过 \tilde{B}^{2k} 进行模糊聚类, 重复上述 1-3 步, 得到的结果等价于前面直接聚类得到的结果。

4.2.3 算例分析

绿色供应商选择的第一步是确定选择标准。在评估供应商的环境表现时, 专家的评价是很重要的一方面, 这是因为现实中不仅要考虑供应商提供的定量的数据, 其服务质量等定性因素也很重要。因此本文使用专家提供的评价准则来评价供应商, 这些准则分别是: 环保技术(C_1)、环保材料(C_2)、获得环境认证的情况(C_3)、员工培训情况(C_4)、污染控制情况(C_5)。现有 3 位备选供应商 $\{A_1, A_2, A_3\}$, 邀请专家确定出准则权重 $\omega = (0.23, 0.21, 0.16, 0.25, 0.15)$, 专家以十分制打分的方式给出评价值, 二型三角模糊数的元素部分 $[a, b, c]$ 表示准则值为 b 的可能性最大且波动范围位于 $[a, c]$ 范围内, 隶属度部分表示其对自身评价的信心水平为 μ^M 的可能性最大且波动范围位于 $[\mu^L, \mu^R]$ 范围内。具体见表 4-1, 试选出最理想的供应商。

表 4-1 方案的准则值

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	$\langle [5,7,9]; [0.7,0.9,1.0] \rangle$	$\langle [9,10,10]; [0.5,0.7,0.8] \rangle$	$\langle [7,9,10]; [0.5,0.7,1] \rangle$	$\langle [7,9,10]; [0.9,1.0,1.0] \rangle$	$\langle [7,8,10]; [0.7,0.8,0.9] \rangle$
A_2	$\langle [7,9,10]; [0.6,0.8,0.9] \rangle$	$\langle [7,9,10]; [0.5,0.8,1] \rangle$	$\langle [9,10,10]; [0.6,0.7,0.8] \rangle$	$\langle [9,10,10]; [0.8,0.9,1.0] \rangle$	$\langle [9,10,10]; [0.4,0.6,0.7] \rangle$
A_3	$\langle [5,7,9]; [0.4,0.9,1.0] \rangle$	$\langle [5,7,9]; [0.7,0.9,1] \rangle$	$\langle [7,9,10]; [0.6,0.9,1] \rangle$	$\langle [5,7,9]; [0.6,0.8,1] \rangle$	$\langle [7,9,10]; [0.6,0.7,0.8] \rangle$

步骤 1: 由于本算例中的准则均为效益型，且标度相同，因此不需规范化；

步骤 2: 根据可能度公式两两比较，得到可能度矩阵 \tilde{P} ，从而得到每一准则下的相对理想方案和相对负理想方案；

表 4-2 可能度及最优方案表

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
$P(A_1 > A_2)$	0.27	0.37	0.17	0.37	1
$P(A_1 > A_3)$	0.66	0.72	0.04	1	0.71
$P(A_2 > A_3)$	0.93	0.73	0.12	1	0.11
A_j^+	A_2	A_2	A_3	A_2	A_1
A_j^-	A_3	A_3	A_1	A_3	A_2

步骤 3: 计算各备选方案的整体效益值 S_i 和个别遗憾值 R_i ：

整体效益值 S_i 分别为：

$$S_1 = \langle [-0.88, 0.37, 1.03]; [0.14, 0.26, 0.35] \rangle;$$

$$S_2 = \langle [-0.92, -0.01, 0.51]; [0.04, 0.07, 0.10] \rangle;$$

$$S_3 = \langle [-0.79, 0.93, 1.30]; [0.22, 0.42, 0.56] \rangle.$$

个别遗憾值 R_i 分别为：

$$R_1 = \langle [-0.09, 0.23, 0.23]; [0.33, 0.71, 0.89] \rangle;$$

$$R_2 = \langle [-0.05, 0, 0.05]; [0.57, 0.77, 1] \rangle;$$

$$R_3 = \langle [0, 0.25, 0.25]; [0.51, 0.74, 1] \rangle.$$

步骤 4: 根据可能度公式比较得出 S_i 中的最小值 S^* （使整体效益最大）和最大值 S_* （使整体效益最小）；以及 R_i 中的最小值 R^* （使个别遗憾最小）和最大值 R_* （使个别遗憾最大）；

表 4-3 S_i 的可能度表

$P(S_1 > S_2)$	$P(S_1 > S_3)$	$P(S_2 > S_3)$	S^*	S_*
0.72	0.22	0	S_2	S_3

表 4-4 R_i 的可能度表

$P(R_1 > R_2)$	$P(R_1 > R_3)$	$P(R_2 > R_3)$	R^*	R_*
1	0.504	0	R_2	R_1

步骤 5: 理想方案为 $T^* = (S_2, R_2)$ ，负理想方案 $T_* = (S_3, R_1)$ 。将原方案集中的方案表示为 $T_i = (S_i, R_i)$ 的形式，并将这两个假设的方案加入原方案集中得到新方案集 $\{T_1, T_2, T_3, T^*, T_*\}$ 。

步骤 6: 计算新方案集中方案间的相似度如下表：

表 4-5 方案间的相似度表

	T_1	T_2	T_3	T^*	T_*
T_1	1	0.87	0.86	0.87	0.88
T_2	0.87	1	0.74	1	0.76
T_3	0.86	0.74	1	0.74	0.98
T^*	0.87	1	0.74	1	0.76
T_*	0.88	0.76	0.98	0.76	1

步骤 7: 显然表 4-5 中主对角线上的元素为 1 且转置后矩阵不变，即其具有自反性和对称性。现求其 \tilde{B}^2 ，采用取小取大算子 ($\wedge \vee$):

$$\begin{aligned} \tilde{B}^2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0.87 & 0.86 & 0.87 & 0.88 \\ 0.87 & 1 & 0.74 & 1 & 0.76 \\ 0.86 & 0.74 & 1 & 0.74 & 0.98 \\ 0.87 & 1 & 0.74 & 1 & 0.76 \\ 0.88 & 0.76 & 0.98 & 0.76 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0.87 & 0.86 & 0.87 & 0.88 \\ 0.87 & 1 & 0.74 & 1 & 0.76 \\ 0.86 & 0.74 & 1 & 0.74 & 0.98 \\ 0.87 & 1 & 0.74 & 1 & 0.76 \\ 0.88 & 0.76 & 0.98 & 0.76 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0.87 & 0.88 & 0.87 & 0.88 \\ 0.87 & 1 & 0.86 & 1 & 0.87 \\ 0.88 & 0.86 & 1 & 0.86 & 0.98 \\ 0.87 & 1 & 0.86 & 1 & 0.87 \\ 0.88 & 0.87 & 0.98 & 0.87 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$\tilde{B}^2 \neq \tilde{B}$ ，因此继续求解：

$$\tilde{B}^4 = \tilde{B}^2 \circ \tilde{B}^2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0.87 & 0.88 & 0.87 & 0.88 \\ 0.87 & 1 & 0.86 & 1 & 0.87 \\ 0.88 & 0.86 & 1 & 0.86 & 0.98 \\ 0.87 & 1 & 0.86 & 1 & 0.87 \\ 0.88 & 0.87 & 0.98 & 0.87 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0.87 & 0.88 & 0.87 & 0.88 \\ 0.87 & 1 & 0.86 & 1 & 0.87 \\ 0.88 & 0.86 & 1 & 0.86 & 0.98 \\ 0.87 & 1 & 0.86 & 1 & 0.87 \\ 0.88 & 0.87 & 0.98 & 0.87 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0.87 & 0.88 & 0.87 & 0.88 \\ 0.87 & 1 & 0.87 & 1 & 0.87 \\ 0.88 & 0.87 & 1 & 0.87 & 0.98 \\ 0.87 & 1 & 0.87 & 1 & 0.87 \\ 0.88 & 0.87 & 0.98 & 0.87 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B}^4 \neq \tilde{B}^2;$$

$$\tilde{B}^8 = \tilde{B}^4 \circ \tilde{B}^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0.87 & 0.88 & 0.87 & 0.88 \\ 0.87 & 1 & 0.87 & 1 & 0.87 \\ 0.88 & 0.87 & 1 & 0.87 & 0.98 \\ 0.87 & 1 & 0.87 & 1 & 0.87 \\ 0.88 & 0.87 & 0.98 & 0.87 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0.87 & 0.88 & 0.87 & 0.88 \\ 0.87 & 1 & 0.87 & 1 & 0.87 \\ 0.88 & 0.87 & 1 & 0.87 & 0.98 \\ 0.87 & 1 & 0.87 & 1 & 0.87 \\ 0.88 & 0.87 & 0.98 & 0.87 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0.87 & 0.88 & 0.87 & 0.88 \\ 0.87 & 1 & 0.87 & 1 & 0.87 \\ 0.88 & 0.87 & 1 & 0.87 & 0.98 \\ 0.87 & 1 & 0.87 & 1 & 0.87 \\ 0.88 & 0.87 & 0.98 & 0.87 & 1 \end{bmatrix}$$

$\tilde{B}^8 = \tilde{B}^4$ ，因此 \tilde{B}^8 是模糊等价矩阵。

从 \tilde{B}^8 出发对元素进行模糊聚类：

1 取 $0.98 < \lambda \leq 1$ ，得：

$$\tilde{B}_\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

按该水平， $b_{24} = b_{42} = 1$ ，可将 T_2, T^* 归为一类，其余元素各自成一类，共分成 4 类：

$$T = \{T_1\} \cup \{T_2, T^*\} \cup \{T_3\} \cup \{T_*\};$$

2 取 $0.88 < \lambda \leq 0.98$

$$\tilde{B}_\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

按该水平， $b_{24} = b_{42} = 1$ ， $b_{35} = b_{53} = 1$ ，可将 T_2, T^* 归为一类， T_3, T_* 归为一类，

其余元素各自成一类，共分成 3 类：

$$T = \{T_1\} \cup \{T_2, T^*\} \cup \{T_3, T_*\};$$

3 取 $0.87 < \lambda \leq 0.88$

$$\tilde{B}_\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

按该水平， $b_{24} = b_{42} = 1$ ， $b_{13} = b_{15} = b_{31} = b_{51} = b_{35} = b_{53} = 1$ ，可将 T_2, T^* 归为一类， T_1, T_3, T_* 归为一类，共分成 2 类：

$$T = \{T_1, T_3, T_*\} \cup \{T_2, T^*\}$$

4 取 $0 < \lambda \leq 0.87$

$$\tilde{B}_\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

按该水平，可将 T_1, T_2, T_3, T^*, T_* 归为一类，共分成 1 类：

$$T = \{T_1, T_2, T_3, T^*, T_*\}$$

T_2 最先与理想方案 T^* 归为一类，因此， T_2 为最优方案，应选择供应商 A_2 。

4.3 基于后悔理论的二型三角模糊多准则决策方法

对于模糊多准则决策问题，由于在决策前决策者难以看清各方案的优劣，导致决策者对于自己的决策行为更加没有信心，更倾向于在决策后再次考虑其他方案，将自己所选的方案同其他方案进行比较，因此将决策者没有选择其他方案其心理所感受到的后悔值考虑到选择某方案带来的效用值中显得尤为重要。于是后悔理论^[119, 120]被提出并被广泛研究。文献[121]指出，后悔是指个体产生的一种基于认知的消极情绪。

后悔理论体现了在不确定环境中，人们对于自己没有选到最优结果所产生的后悔情绪。为此，本小节将后悔理论运用到模糊多准则决策问题中，提出基于后悔理论的二型梯形模糊多准则决策方法，并进行了实例分析。

经济学中常用效用函数^[122]来概括消费者行为，效用函数是一种描述偏好关

系的非常方便的工具，但却难以给出任何心理方面的解释。事实上，人们常常会将自己决策的结果与其他决策结果进行比较，如果自己的决策结果是最好的，会感到欣喜，同样，如果自己选到的不是最好的，就会后悔自己当初没有做出最好的选择。

后悔理论^[119, 120]将“后悔”和“欣喜”两种心理纳入到个人风险决策的偏好关系中，很好地解释了期望效用理论所不能解释的 Allais 悖论、Ellsberg 悖论、偏好反转现象等异象^[123]。后悔理论认为，决策者选择某方案所得到的效用值既包括当前所选方案带来的效用值，也包括没有选择其他方案其心理所感受到的后悔值。

4.3.1 问题描述

在一些实际的决策问题，如选举等问题中，准则值往往难以以精确数或传统模糊数的形式给出，因此在这一部分中，我们用二型三角模糊数来解决这类多准则决策问题。同时，这类问题有一个普遍特点，那就是难以量化，难以避免决策者个人因素带来的误差，也就使结果更容易造成心理落差，从而感到决策不满意，因此很有必要将事后的后悔或欣喜情感考虑进来，得到一个相对最优的结果，减少后悔成分。

设有 m 个方案 $A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ ， n 个决策准则 $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ ，准则权重 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$ ， $\omega_i \in [0, 1]$ ， $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ 。决策矩阵是 $\tilde{X} = (\tilde{x}_{ij})_{m \times n}$ ， \tilde{x}_{ij} 是二型三角模糊数，试选出最佳方案。

4.3.2 决策步骤

对于上述问题，为了选出最佳方案。决策步骤如下：

步骤 1： 将决策矩阵 $\tilde{X} = (\tilde{x}_{ij})_{m \times n}$ 化为规范化决策矩阵 $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{m \times n}$ ，其中 $\tilde{a} = \langle [a_{ij}^1, a_{ij}^2, a_{ij}^3]; \{\mu_{ij}^L, \mu_{ij}^M, \mu_{ij}^R\} \rangle$ 。

对于效益型准则：
$$a_{ij}^k = \frac{x_{ij}^k - \min_j x_{ij}^1}{\max_j x_{ij}^3 - \min_j x_{ij}^1}, \mu_{\tilde{a}_{ij}}^s = \mu_{\tilde{x}_{ij}}^s; k = 1, 2, 3; s = L, M, R.$$

对于成本型准则：
$$a_{ij}^k = \frac{\max_j x_{ij}^3 - x_{ij}^k}{\max_j x_{ij}^3 - \min_j x_{ij}^1}, \mu_{\tilde{a}_{ij}}^s = \mu_{\tilde{x}_{ij}}^s; k = 1, 2, 3; s = L, M, R.$$

步骤 2： 确定最优方案 A_j^* 。

根据可能度公式两两比较，得到可能度矩阵 $\tilde{P} = [\tilde{p}_{ij}]_{m \times n}$ ，从而得到每一准则下的最优方案 A_j^* 。

步骤 3: 计算各备选方案的效用值 V_{ij} 和后悔值 R_{ij} 。

Tversky^[124, 125]曾提出一个被广泛认可的效用函数：
$$v(x) = \begin{cases} x^\alpha, & x \geq 0 \\ -\theta(-x)^\beta, & x < 0 \end{cases}$$

由于本文中 x 表示收益，因此该效用函数在本文中可以简化为 $v(x) = x^\alpha$ 。
 $0 < \alpha < 1$ ， α 越小，表示决策者越趋向于风险规避。

后悔理论认为，决策者选择某方案所得到的效用值既包括当前所选方案带来的效用值，也包括没有选择其他方案其心理所感受到的后悔值。人们在决策后常常不仅关注自己所选的方案，也关注未选方案，会因为未选到好方案而形成心理落差。Quiggin^[126]给出决策者对方案 x 的感知效用函数为： $V = v(x_i) + r(v(x_i) - v(x_*))$ ，其中， $x_* = \max\{x_i | i = 1, 2, \dots, m\}$ ， $v(x)$ 是效用函数； $r(x)$ 是后悔函数^[127]。这里， $r(x) \leq 0$ ，当 $r(x) = 0$ 时，表示决策者选到了最优方案，完全没有后悔，后悔值为 0，当 $r(x) < 0$ ，表示决策者未选到最优方案， $r(x)$ 的绝对值 $|r(x)|$ 表示后悔值。因此各备选方案在各准则下的效用值 V_{ij} 和后悔值 R_{ij} 分别为：

$$V_{ij} = a_{ij}^\alpha \tag{4-9}$$

$$R_{ij} = a_{ij}^\alpha - a_{*j}^\alpha \tag{4-10}$$

其中 $a_{*j}^\alpha - a_{ij}^\alpha$ 为准则 j 下当前方案与最优方案间的差距， a_{*j} 为 A_j^* 对应的准则值， V_{ij} 越大则效用值越大， R_{ij} 越大则后悔值越大。

步骤 4: 计算各方案在各准则下产生的后悔效用值 T_{ij} ，得到后悔效用矩阵 $\tilde{T} = [T_{ij}]_{m \times n}$ ；

$$T_{ij} = V_{ij} - \theta R_{ij} \tag{4-11}$$

后悔值 θ 表示决策者对后悔的规避程度， $\theta > 0$ 。

步骤 5: 定义优序函数 $P(T_{sj}, T_{ij}) = \begin{cases} 0, & T_{sj} < T_{ij} \\ 1, & T_{sj} \geq T_{ij} \end{cases}$ ；

步骤 6: 确定任意方案 A_s 和方案 A_t 的后悔效用值的优序指数 $\Pi(T_s, T_t)$ ；

$$\Pi(T_s, T_t) = \sum_{j=1}^n \omega_j P(T_{sj}, T_{tj}) \tag{4-12}$$

则 $\Pi(T_t, T_s) = \sum_{j=1}^n \omega_j P(T_{tj}, T_{sj}) = 1 - \Pi(T_s, T_t)$

步骤 7: 方案 A_i 的优序正流和负流定义为

$$\Phi^+(A_i) = \sum_{s=1}^m \Pi \mathcal{I}_i^- \mathcal{I}_s^+ \quad (4-13)$$

$$\Phi^-(A_i) = \sum_{s=1}^m \Pi \mathcal{I}_s^- \mathcal{I}_i^+ \quad (4-14)$$

$\Phi^+(A_i)$ 和 $\Phi^-(A_i)$ 分别表示方案 A_i 超过另外方案和被其它方案超过的程度。则 A_i 的优序净流为:

$$\Phi(A_i) = \Phi^+(A_i) - \Phi^-(A_i) \quad (4-15)$$

步骤 8: 按照方案 A_i 的优序净流从大到小对方案排序。

4.3.3 算例分析

绿色供应商选择的第一步是确定选择标准。在评估供应商的环境表现时, 专家的评价是很重要的一方面, 这是因为现实中不仅要考虑供应商提供的定量的数据, 其服务质量等定性因素也很重要。因此本文使用专家提供的评价准则来评价供应商, 这些准则分别是: 环保技术(C_1)、环保材料(C_2)、获得环境认证的情况(C_3)、员工培训情况(C_4)、污染控制情况(C_5)。现有 3 位备选供应商 $\{A_1, A_2, A_3\}$, 邀请专家确定出准则权重为 $\omega = (0.23, 0.21, 0.16, 0.25, 0.15)$, 专家以十分制打分的方式给出评价值, 二型三角模糊数的元素部分 $[a, b, c]$ 表示准则值为 b 的可能性最大且波动范围位于 $[a, c]$ 范围内, 隶属度部分表示其对自身评价的信心水平为 μ^M 的可能性最大且波动范围位于 $[\mu^L, \mu^R]$ 范围内(见表 4-6), 试选出最理想的供应商。

表 4-6 方案的准则值

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	$\langle [5,7,9]; [0.7,0.9,1.0] \rangle$	$\langle [9,10,10]; [0.5,0.7,0.8] \rangle$	$\langle [7,9,10]; [0.5,0.7,1] \rangle$	$\langle [7,9,10]; [0.9,1.0,1.0] \rangle$	$\langle [7,8,10]; [0.7,0.8,0.9] \rangle$
A_2	$\langle [7,9,10]; [0.6,0.8,0.9] \rangle$	$\langle [7,9,10]; [0.5,0.8,1] \rangle$	$\langle [9,10,10]; [0.6,0.7,0.8] \rangle$	$\langle [9,10,10]; [0.8,0.9,1.0] \rangle$	$\langle [9,10,10]; [0.4,0.6,0.7] \rangle$
A_3	$\langle [5,7,9]; [0.4,0.9,1.0] \rangle$	$\langle [5,7,9]; [0.7,0.9,1] \rangle$	$\langle [7,9,10]; [0.6,0.9,1] \rangle$	$\langle [5,7,9]; [0.6,0.8,1] \rangle$	$\langle [7,9,10]; [0.6,0.7,0.8] \rangle$

步骤 1: 由于本算例中的准则均为效益型, 且标度相同, 因此不需规范化。

步骤 2: 根据 2.2.4 节中的可能度公式进行两两比较, 得到可能度矩阵 \tilde{P} , 从而得到每一准则下的最优方案;

表 4-7 可能度及最优方案表

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
$P(A_1 > A_2)$	0.27	0.37	0.17	0.37	1
$P(A_1 > A_3)$	0.66	0.72	0.04	1	0.71
$P(A_2 > A_3)$	0.93	0.73	0.12	1	0.11
A_j^*	A_2	A_2	A_3	A_2	A_1

步骤 3: 计算各备选方案的效用值 V_{ij} 和后悔值 R_{ij} ，目前还没有学者研究后悔理论中系数的赋值，由于人们心理对效用的感觉在各行为理论中是一致的，因此可采用前景理论中定义参数，根据文献[124]取 $\alpha = 0.88$ ；

表 4-8 效用值表

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	$\langle [4.12, 5.54, 6.91]; [0.73, 0.91, 1] \rangle$	$\langle [6.91, 7.59, 7.59]; [0.54, 0.73, 0.82] \rangle$	$\langle [5.54, 6.91, 7.59]; [0.54, 0.73, 1] \rangle$	$\langle [5.54, 6.91, 7.59]; [0.91, 1, 1] \rangle$	$\langle [5.54, 6.23, 7.59]; [0.73, 0.82, 0.91] \rangle$
A_2	$\langle [5.54, 6.91, 7.59]; [0.64, 0.82, 0.91] \rangle$	$\langle [5.54, 6.91, 7.59]; [0.54, 0.82, 1] \rangle$	$\langle [6.91, 7.59, 7.59]; [0.64, 0.73, 0.82] \rangle$	$\langle [6.91, 7.59, 7.59]; [0.82, 0.91, 1] \rangle$	$\langle [6.91, 7.59, 7.59]; [0.45, 0.64, 0.73] \rangle$
A_3	$\langle [4.12, 5.54, 6.91]; [0.45, 0.91, 1] \rangle$	$\langle [4.12, 5.54, 6.91]; [0.73, 0.91, 1] \rangle$	$\langle [5.54, 6.91, 7.59]; [0.64, 0.91, 1] \rangle$	$\langle [4.12, 5.54, 6.91]; [0.64, 0.82, 1] \rangle$	$\langle [5.54, 6.91, 7.59]; [0.64, 0.73, 0.82] \rangle$

表 4-9 后悔值表

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	$\langle [-1.4, 1.37, 3.46]; [0.68, 0.86, 0.95] \rangle$	$\langle [-2, -0.7, 0.67]; [0.54, 0.77, 0.91] \rangle$	$\langle [-2, 0, 2]; [0.59, 0.82, 1] \rangle$	$\langle [-0.7, 0.67, 2]; [0.86, 0.95, 1] \rangle$	$\langle [-2, 0, 2]; [0.73, 0.82, 0.91] \rangle$
A_2	$\langle [-2, 0, 2]; [0.64, 0.82, 0.91] \rangle$	$\langle [-2, 0, 2]; [0.54, 0.82, 1] \rangle$	$\langle [-2, -0.7, 0.67]; [0.64, 0.82, 0.91] \rangle$	$\langle [-0.7, 0, 0.7]; [0.82, 0.91, 1] \rangle$	$\langle [-2, -1.4, 0.67]; [0.58, 0.72, 0.81] \rangle$
A_3	$\langle [-1.4, 1.37, 3.46]; [0.55, 0.86, 0.95] \rangle$	$\langle [-1.4, 1.37, 3.46]; [0.63, 0.86, 1] \rangle$	$\langle [-2, 0, 2]; [0.64, 0.91, 1] \rangle$	$\langle [0, 2, 3.46]; [0.74, 0.87, 1] \rangle$	$\langle [-2, -0.7, 2]; [0.68, 0.77, 0.87] \rangle$

后悔值一般存在负数元素，这是因为决策者所选的方案可能表现很好，且决策者也不相信最优方案能达到最佳状态，表现的比所选方案更好，决策者完全

没有后悔, 所选方案的表现已经超过决策者的最大期望值, 这时的后悔值衡量的不再是后悔情绪, 而是欣喜情绪, 因此为负数。

步骤 4: 计算各方案在各准则下产生的后悔效用值 T_{ij} , 在此算例中, 决策者对未选到最优人选的后悔值和选到优秀人选的效用值是等同的, 即 $\theta = 1$;

表 4-10 后悔效用值表

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	$\langle [0.66, 4.17, 8.29]; [0.72, 0.9, 0.9] \rangle$	$\langle [6.24, 8.26, 9.63]; [0.54, 0.74, 0.83] \rangle$	$\langle [3.5, 6.9, 9.6]; [0.55, 0.74, 1] \rangle$	$\langle [3.5, 6.24, 8.26]; [0.9, 0.99, 1] \rangle$	$\langle [3.5, 6.23, 9.63]; [0.73, 0.82, 0.91] \rangle$
A_2	$\langle [3.5, 6.91, 9.63]; [0.64, 0.82, 0.91] \rangle$	$\langle [3.5, 6.91, 9.63]; [0.54, 0.82, 1] \rangle$	$\langle [6.24, 8.26, 9.63]; [0.64, 0.74, 0.83] \rangle$	$\langle [6.24, 7.59, 8.26]; [0.82, 0.91, 1] \rangle$	$\langle [6.24, 8.94, 9.63]; [0.47, 0.65, 0.74] \rangle$
A_3	$\langle [0.66, 4.17, 8.29]; [0.47, 0.9, 0.99] \rangle$	$\langle [0.66, 4.17, 8.29]; [0.7, 0.9, 1] \rangle$	$\langle [3.5, 6.9, 9.6]; [0.64, 0.91, 1] \rangle$	$\langle [0.66, 3.5, 6.91]; [0.67, 0.84, 1] \rangle$	$\langle [3.5, 7.59, 9.63]; [0.65, 0.74, 0.83] \rangle$

特别地, 后悔效用值允许存在负数元素, 表示决策者所选的方案在效用范围内可能表现出较低的值, 而决策者是将自己所选方案的结果与最优方案的最优情况进行比较, 这时, 虽然该方案仍然给决策者带来了效用, 但是决策者由于没有选到好方案而感觉非常后悔, 没有选到好方案所体验到的后悔情绪已经超过了所选方案带来的欣喜情绪。

步骤 5: 通过两两比较得到可能度表, 进而通过计算优序函数得到优序表;

表 4-11 可能度表

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
$P(A_1 > A_2)$	0.22	0.61	0.26	0.23	0.49
$P(A_1 > A_3)$	0.54	0.94	0.36	1	0.51
$P(A_2 > A_3)$	0.83	0.77	0.54	1	0.52

表 4-12 优序表

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
$P(A_1, A_2)$	0	1	0	0	0
$P(A_1, A_3)$	1	1	0	1	1
$P(A_2, A_3)$	1	1	1	1	1

步骤 6: 确定任意方案 A_s 和方案 A_t 的后悔效用值的优序指数 $\Pi(T_s, T_t)$;

$$\Pi(T_1, T_2) = 0.21; \Pi(T_2, T_1) = 0.79; \Pi(T_1, T_3) = 0.84;$$

$$\Pi(T_3, T_1) = 0.16; \Pi(T_2, T_3) = 1; \Pi(T_3, T_2) = 0.$$

步骤 7: 方案 A_i 的优序正流和优序负流为: $\Phi^+(A_1) = 2.05$; $\Phi^+(A_2) = 2.79$;

$$\Phi^+(A_3) = 1.16; \Phi^-(A_1) = 1.95; \Phi^-(A_2) = 1.21; \Phi^-(A_3) = 2.84.$$

那么 A_i 的优序净流为: $\Phi(A_1) = 0.1$; $\Phi(A_2) = 1.58$; $\Phi(A_3) = -1.68$.

步骤 8: 按照方案 A_i 的优序净流从大到小对方案排序: $A_2 \succ A_1 \succ A_3$. 则 A_2 是最理想的供应商。

4.4 基于理想点的二型三角模糊多准则决策方法

4.4.1 问题描述

对于一多准则决策问题, 设有 m 个方案 $A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$, n 个决策准则 $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$, 准则权重 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$, $\omega_i \in [0, 1]$, $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ 。决策矩阵是 $\tilde{X} = (\tilde{x}_{ij})_{m \times n}$, \tilde{x}_{ij} 是二型三角模糊数, 决策者的心态指标是 γ , 试选出最佳方案。

4.4.2 决策步骤

步骤 1: 将决策矩阵 $\tilde{X} = (\tilde{x}_{ij})_{m \times n}$ 化为规范化决策矩阵 $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{m \times n}$, 其中 $\tilde{a} = \langle [a_{ij}^L, a_{ij}^M, a_{ij}^R]; \mu_{\tilde{a}_{ij}}^L, \mu_{\tilde{a}_{ij}}^M, \mu_{\tilde{a}_{ij}}^R \rangle$ 。

对于效益型准则:
$$a_{ij}^k = \frac{x_{ij}^k - \min_j x_{ij}^1}{\max_j x_{ij}^3 - \min_j x_{ij}^1}, \mu_{\tilde{a}_{ij}}^s = \mu_{\tilde{x}_{ij}}^s; k = 1, 2, 3; s = L, M, R.$$

对于成本型准则:
$$a_{ij}^k = \frac{\max_j x_{ij}^3 - x_{ij}^k}{\max_j x_{ij}^3 - \min_j x_{ij}^1}, \mu_{\tilde{a}_{ij}}^s = \mu_{\tilde{x}_{ij}}^s; k = 1, 2, 3; s = L, M, R.$$

步骤 2: 计算 \tilde{a}_{ij} 的心态指标函数 F_{ij} ;

我们知道, 区间数 $\tilde{a}_i = [a_i^L, a_i^U]$ 的心态指标为^[128]:

$$F_i = \frac{a_i^L + a_i^U}{2} + (2\gamma - 1) \frac{a_i^U - a_i^L}{2}$$

心态系数 $\gamma \in [0, 1]$, 当用它来比较区间数时, 常数 1/2 不会影响结果, 因此心态

指标也可以定义为:

$$F_i = (a_i^L + a_i^U) + (2\gamma - 1)(a_i^U - a_i^L)$$

解释 4-1 在实际中,人们常常对区间有不同的态度,如果被告知一个数值位于区间 $[a^L, a^U]$ 内,一些人认为这个值会非常小,接近于区间下界 a^L ,相反地,一些人倾向于认为这个值接近于区间上界 a^U ,也有些人倾向于将这个值估计在区间中部接近于 $(a^L + a^U)/2$ 的某个值。例如,当不熟悉物理的学生们被告知镭的质子数位于区间 $[90, 100]$ 内时,一些学生会认为质子数大约是 90,一些学生会认为大约是 100,其他人则会猜测是某个 90 到 100 之间的数字,如 95。

那么对于二型三角模糊数 $\tilde{a}_i = \langle [a_i, b_i, c_i]; [\mu_i^L, \mu_i^M, \mu_i^R] \rangle$,若 $b_i = (a_i + c_i)/2$, $\mu_i^M = (\mu_i^L + \mu_i^R)/2$,则其同样具有心态指标,其心态指标可以定义为^[118]:

$$F_i = (a_i + c_i)\theta_{a_i} + (2\gamma - 1)(c_i - a_i)\theta_{a_i} \quad (4-16)$$

其中 $\gamma \in [0, 1]$ 。

$$\begin{aligned} \theta_{a_i} &= \frac{(\mu_i^L + \mu_i^R)}{2} + (2\gamma - 1)\frac{(\mu_i^R - \mu_i^L)}{2} \\ &= (1 - \gamma)\mu_i^L + \gamma\mu_i^R. \end{aligned}$$

表示隶属度区间的心态指标。

解释 4-2 三角模糊数 $[a_i, b_i, c_i]$ 中的上界 a_i 和下界 c_i 也组成一个区间 $[a_i, c_i]$,因此同样存在心态的作用,例如,超市里一包糖的净含量标为 $200 \pm 10g$,表示为三角模糊数就是 $[190, 200, 210]$,对此净含量,有些人会认为商人会尽一切可能节约成本增加利益,净含量只会是 190g,也有些人会认为,商家因为担心净含量受某些影响而减少,一定会多装一些,在没有出现这些影响因素的正常情况下,净含量应该是多一些的,比如 210g,而其他人则会认为,正常情况下就是 200g。

当比较 \tilde{a}_i 时,实际上有两个区间需要决策者考虑,即判断区间和隶属度区间,因此我们使用两个区间的心态指标。

在决策环境中,心态系数 γ 实际上反映了决策者的乐观程度。如果决策中的准则是效益型的,也就是越大越好,且决策者相信判断值位于 $[a_i, c_i]$,那么悲观的决策者倾向于认为这个值接近于下界 a_i ,相反地,乐观的决策者倾向于认为这个值会接近于上界 c_i ,而心态中庸的决策者会认为这个值大约位于 b_i 。如果准则是成本型的,我们可以通过规范化方法将其转化为效益型准则。

相应的,当 $\gamma = 1$, $\theta_{a_i} = \mu_i^R$ 时, F_i 化为 $2c_i\mu_i^R$,这表示决策者认为判断区间和隶属度区间都可以达到上界,因此 $\gamma = 1$ 是最乐观的情形。当 $\gamma = 0$, $\theta_{a_i} = \mu_i^L$, F_i 化为 $2a_i\mu_i^L$,这表示决策者认为判断区间和隶属度区间都将取下界,因此 $\gamma = 0$ 是最

悲观的情形。当 γ 从 0 逐渐增加到 1 时，决策者逐渐变得乐观，当 $\gamma=1/2$ ， $\theta_{a_i} = (\mu_i^L + \mu_i^R) / 2 = \mu_i^M$ 时， $F_i = (a_i + c_i)\mu_i^M = 2b_i\mu_i^M$ ，这表示决策者认为判断区间和隶属度区间都取中间值，因此 $\gamma=1/2$ 是心态中庸的情形。当决策者是心态中庸时，心态指标是 $F_i = 2b_i\mu_i^M$ 。

\tilde{a}_{ij} 的心态指标函数 F_{ij} 可以用来比较 \tilde{a}_{ij} 的大小：

设 $\tilde{a}_1 = \langle [a_1, b_1, c_1]; [\mu_1^L, \mu_1^M, \mu_1^R] \rangle$ 和 $\tilde{a}_2 = \langle [a_2, b_2, c_2]; [\mu_2^L, \mu_2^M, \mu_2^R] \rangle$ ，那么

(1) 若 $F_1 \geq F_2$ ，那么 $\tilde{a}_1 \geq \tilde{a}_2$ ；

(2) 若 $F_1 < F_2$ ，那么 $\tilde{a}_1 < \tilde{a}_2$ 。

步骤 3: 寻找正理想点 A^* 与负理想点 A^- ；

对 F_{ij} 进行排序，找到第 j 个准则下最大准则值 \tilde{r}_j^* 即正理想点在第 j 个准则下的准则值，最小准则值 \tilde{r}_j^- 即负理想点在第 j 个准则下的准则值。

$$A^* = (\tilde{r}_1^*, \dots, \tilde{r}_n^*), A^- = (\tilde{r}_1^-, \dots, \tilde{r}_n^-).$$

步骤 4: 利用 TT2WAA 算子分别计算各方案到正、负理想解的差的绝对值；差的绝对值公式定义如下：

设 $\tilde{a}_1 = \langle [a_1, b_1, c_1]; [\mu_1^L, \mu_1^M, \mu_1^R] \rangle$ 和 $\tilde{a}_2 = \langle [a_2, b_2, c_2]; [\mu_2^L, \mu_2^M, \mu_2^R] \rangle$ ，其中 $c_1 \geq c_2$ ，那么这两个数的差的绝对值定义为：

$$\tilde{h}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2) = \tilde{h}(\tilde{a}_2, \tilde{a}_1) = \begin{cases} \langle [a_1 - c_2, b_1 - b_2, c_1 - a_2]; [\frac{\|\tilde{a}_1\|\mu_1^L + \|\tilde{a}_2\|\mu_2^L}{\|\tilde{a}_1\| + \|\tilde{a}_2\|}, \frac{\|\tilde{a}_1\|\mu_1^M + \|\tilde{a}_2\|\mu_2^M}{\|\tilde{a}_1\| + \|\tilde{a}_2\|}, \frac{\|\tilde{a}_1\|\mu_1^R + \|\tilde{a}_2\|\mu_2^R}{\|\tilde{a}_1\| + \|\tilde{a}_2\|}] \rangle & (a_1 \geq c_2) \\ \langle [0, \max(0, b_1 - b_2), c_1 - a_2]; [\frac{\|\tilde{a}_1\|\mu_1^L + \|\tilde{a}_2\|\mu_2^L}{\|\tilde{a}_1\| + \|\tilde{a}_2\|}, \frac{\|\tilde{a}_1\|\mu_1^M + \|\tilde{a}_2\|\mu_2^M}{\|\tilde{a}_1\| + \|\tilde{a}_2\|}, \frac{\|\tilde{a}_1\|\mu_1^R + \|\tilde{a}_2\|\mu_2^R}{\|\tilde{a}_1\| + \|\tilde{a}_2\|}] \rangle & (a_2 \leq a_1 < c_2) \\ \langle [0, |b_1 - b_2|, \max(c_2 - a_1, c_1 - a_2)]; [\frac{\|\tilde{a}_1\|\mu_1^L + \|\tilde{a}_2\|\mu_2^L}{\|\tilde{a}_1\| + \|\tilde{a}_2\|}, \frac{\|\tilde{a}_1\|\mu_1^M + \|\tilde{a}_2\|\mu_2^M}{\|\tilde{a}_1\| + \|\tilde{a}_2\|}, \frac{\|\tilde{a}_1\|\mu_1^R + \|\tilde{a}_2\|\mu_2^R}{\|\tilde{a}_1\| + \|\tilde{a}_2\|}] \rangle & (a_1 \leq a_2) \end{cases} \quad (4-17)$$

那么各方案到正、负理想解的差的绝对值为：

$$\tilde{h}_i^+ = TT2WAA_{\omega}(\tilde{h}(\tilde{r}_{ij}, \tilde{r}_j^*)) = \sum_{j=1}^n \omega_j \tilde{h}(\tilde{r}_{ij}, \tilde{r}_j^*), \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4-18)$$

$$\tilde{h}_i^- = TT2WAA_{\omega}(\tilde{h}(\tilde{r}_{ij}, \tilde{r}_j^-)) = \sum_{j=1}^n \omega_j \tilde{h}(\tilde{r}_{ij}, \tilde{r}_j^-), \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4-19)$$

步骤 5: 计算方案 A_i 的综合属性值：

$$CC_i = \frac{\tilde{h}_i^-}{\tilde{h}_i^+ + \tilde{h}_i^-} \quad (4-20)$$

步骤 6: 根据 CC_i 按照降序进行排序, 进而得到方案的排序。

4.4.3 算例分析

在判断程序员的工作时, 其代码的规范化程度是一个重要方面, 代码规范的程序编写保持一致性, 能够提高代码的可读性和可维护性, 在团队开发项目时, 程序员之间可共享代码, 且易于代码的回顾。现某软件公司需外派一位程序员去与客户公司联合开发一套管理信息系统, 在选择人员时以代码规范化程度为标准, 现需知道 3 个候选程序员 $A_i(i=1,2,3)$ 的代码规范化程度, 由部门经理进行判断。主要考虑以下准则: 类名简短 C_1 , 注释清晰 C_2 , 外形美观 C_3 , 缩进符标准 C_4 , 准则权重分别为 0.20,0.25,0.30,0.25, 准则均为效益型。各准则下的评估信息用二型三角模糊数表示, 决策者给出的决策信息见表 4-13。

表 4-13 决策者给出的判断表

	C_1	C_2	C_3	C_4
A_1	<[4.372,5.542,6.712];[0.614,0.664,0.714]>	<[6.712,7.526,8.34];[0.638,0.688,0.738]>	<[5.628,6.788,7.948];[0.639,0.722,0.804]>	<[2.628,3.814,5.0];[0.640,0.707,0.774]>
A_2	<[4.712,6.356,8.0];[0.627,0.731,0.835]>	<[6.052,6.696,7.340];[0.572,0.704,0.836]>	<[6.288,7.458,8.628];[0.611,0.723,0.835]>	<[3.340,4.67,6.0];[0.580,0.708,0.836]>
A_3	<[5.372,6.372,7.372];[0.678,0.762,0.846]>	<[6.372,7.228,8.084];[0.674,0.741,0.807]>	<[5.968,7.170,8.372];[0.636,0.700,0.764]>	<[3.628,4.602,5.576];[0.697,0.764,0.831]>

步骤 1: 规范化决策矩阵;

表 4-14 规范化决策矩阵

	C_1	C_2	C_3	C_4
A_1	<[0.342,0.572,0.801];[0.614,0.664,0.714]>	<[0.489,0.622,0.754];[0.638,0.688,0.738]>	<[0.391,0.580,0.769];[0.639,0.722,0.804]>	<[0.274,0.585,0.895];[0.640,0.707,0.774]>
A_2	<[0.369,0.662,0.955];[0.627,0.731,0.835]>	<[0.440,0.552,0.664];[0.572,0.704,0.836]>	<[0.436,0.636,0.835];[0.611,0.723,0.835]>	<[0.348,0.674,1.000];[0.580,0.708,0.836]>

A_3	$\langle [0.420, 0.650, 0.880]; [0.678, 0.762, 0.846] \rangle$	$\langle [0.465, 0.598, 0.731]; [0.674, 0.741, 0.807] \rangle$	$\langle [0.414, 0.612, 0.810]; [0.636, 0.709, 0.764] \rangle$	$\langle [0.378, 0.688, 0.998]; [0.697, 0.764, 0.831] \rangle$
-------	--	--	--	--

步骤 2: 计算 \tilde{a}_{ij} 的心态指标函数 F_{ij} ;

三个方案在 C_1 准则下的 F 值分别为: 1.519, 1.935, 1.981; C_2 准则下的 F 值分别为: 1.710, 1.555, 1.770; C_3 准则下的 F 值分别为: 1.673, 1.838, 1.715; C_4 准则下的 F 值分别为: 1.652, 1.909, 2.102。

步骤 3: 寻找正理想点、负理想点;

各准则下正理想解分别为 A_3, A_3, A_2, A_3 , 负理想解分别为 A_1, A_2, A_1, A_1 , 所以决策矩阵的正理想解 $A^* = (\langle [0.420, 0.650, 0.880]; [0.678, 0.762, 0.846] \rangle,$

$$\langle [0.465, 0.598, 0.731]; [0.674, 0.741, 0.807] \rangle,$$

$$\langle [0.436, 0.636, 0.835]; [0.611, 0.723, 0.835] \rangle,$$

$$\langle [0.378, 0.688, 0.998]; [0.697, 0.764, 0.831] \rangle);$$

负理想解 $A^- = (\langle [0.342, 0.572, 0.801]; [0.614, 0.664, 0.714] \rangle,$

$$\langle [0.440, 0.552, 0.664]; [0.572, 0.704, 0.836] \rangle,$$

$$\langle [0.391, 0.580, 0.769]; [0.639, 0.722, 0.804] \rangle,$$

$$\langle [0.274, 0.585, 0.895]; [0.640, 0.707, 0.774] \rangle)。$$

步骤 4: 利用 $TT2WAA$ 算子计算各方案到正、负理想点的差的绝对值 $\tilde{h}_i^+, \tilde{h}_i^-$;

表 4-15 到正、负理想点的差的绝对值

	A^*	A^-
A_1	$\langle [0, 0.141, 0.281]; [0.162, 0.377, 0.592] \rangle$	$\langle [0, 0.127, 0.255]; [0.156, 0.360, 0.565] \rangle$
A_2	$\langle [0, 0.131, 0.262]; [0.156, 0.388, 0.620] \rangle$	$\langle [0, 0.147, 0.295]; [0.147, 0.373, 0.597] \rangle$
A_3	$\langle [0, 0.128, 0.257]; [0.169, 0.391, 0.613] \rangle$	$\langle [0, 0.142, 0.284]; [0.169, 0.378, 0.592] \rangle$

步骤 5: 计算方案 A_i 的综合属性值 CC_i 。

$$CC_1 = \langle [0, 0.474, 0.476]; [0.025, 0.133, 0.327] \rangle;$$

$$CC_2 = \langle [0, 0.528, 0.530]; [0.023, 0.142, 0.363] \rangle;$$

$$CC_3 = \langle [0, 0.525, 0.525]; [0.027, 0.145, 0.357] \rangle。$$

步骤 6: 按照 2.2.3 节中的记分函数对 CC_i 进行排序: $CC_1 = 0.88$, $CC_2 = 1.061$, $CC_3 = 1.062$, 因此 $CC_3 > CC_2 > CC_1$, 方案的排序为: $A_3 \succ A_2 \succ A_1$ 。最佳选择是候选程序员 A_3 。

4.5 本章小结

本章在二型三角模糊信息集成方法的基础上，更深入的探讨多准则决策问题。首先给出多准则决策中计算未知权重的方法，然后提出基于聚类的二型三角模糊多准则决策方法、基于后悔理论的二型三角模糊多准则决策方法和基于理想点的二型三角模糊多准则决策方法，详细讨论了其实现步骤，并分别用算例验证了方法的可行性和有效性。

由于现实问题的复杂性以及人类思维的模糊性，人们对自己所做判断的确定程度常常是模糊的，而二型三角模糊数恰好描述了这种模糊程度，因此用二型三角模糊数来反映决策信息更符合常规习惯，进而利用本章中提供的多准则决策方法解决模糊多准则决策问题也可以更准确的模拟现实情景、更真实的反应决策者心态，有利于使决策结果更为恰当。

第五章 基于二型三角模糊数的绿色供应商选择

供应商的形象直接影响着企业,优秀的供应商有助于企业的成功,因此供应商选择问题向来被学者所重视^[79-81]。随着“两型社会”的建设^[129]和环保需求的增加,供应商选择中的环保因素也逐渐被考虑进来,绿色供应商具有环境友好、资源节约、提升企业社会形象等优势,受到了广泛欢迎,很多学者对其进行了研究^[106]。由于对供应商环境表现的评价往往是定性的,难以用精确数字来加以衡量,因此,用模糊语言来表述信息显得更有优势^[87]。相比起传统的模糊语言,双语言数可以更充分的描述这类信息的模糊性^[11],更适宜于处理绿色供应商选择问题。为了便于量化,模糊语言信息一般转化为模糊数来处理,将双语言数转化为二型三角模糊数会使其具有优良的数学性质且便于计算,因此本章利用二型三角模糊数来转化双语言数,进而讨论绿色供应商选择问题。

5.1 绿色供应商选择决策指标体系

5.1.1 绿色供应商选择影响因素分析

供应商环境绩效的评估近来变得越来越重要。减少污染环境的排放物、处理污水、采用环保技术和产品成为了多个组织的当务之急。各家公司正在实施一系列监管检查程序以确保从供应商处收到高质量的、符合环保标准的物料。Bala等^[130]研究了巴塞罗那自治大学的供应商环保化的五种情况,发现在公共组织中,与供应商的合作伙伴关系能促进引进绿色供应链和保证环保计划的顺利实施。Jabbour等^[131]指导了对巴西公司的案例研究,以发现是否供应商选择准则变得越来越环保并得出结论,一个有更先进的环境管理的公司会采用更正式的程序来选择环境方面更适当的供应商。

在文献中,研究者已经通过研究给出了评估供应商和供应链的环境绩效的方法。Enarsson^[132]提出鱼骨图,用以评估供应商的环境特点。Humphreys等^[133]使用案例推理来评估供应商的环境绩效。Bai等^[101]利用灰色系统和粗糙集方法将可持续发展纳入供应商选择问题中。Humphreys等^[134]在供应商选择过程中采用动态模糊隶属函数来评估环境绩效。Handfield等^[135]使用AHP方法来评估供应商的环境绩效。Tuzkaya等^[97]给出评估供应商的混合模糊多准则决策方法。Zhang等^[136]

提出了一种模糊多代理决策方法来管理供应商的环保意识。Noci^[137]提出了评估供应商环境绩效的“绿色”供应商评分系统。Walton等^[138]通过集成供应商环境管理流程,提出了一种供应链环保化的方法。Lee等^[103]使用德尔菲法和模糊扩展层次分析法为高新技术产业提出一种绿色供应商选择模型。Lu等^[139]提出了供应链的不同阶段中,将环境准则应用于评价绿色供应商的多目标决策分析方法。Humphreys等^[140]提出了综合环境准则、供应商选择过程和检查供应商是否违反环保法的多阶段方法。表5-1中列出了目前文献中绿色供应商选择的最常见的影响因素。

表 5-1 绿色供应商选择的常见影响因素

影响因素	作者
清洁技术的可用性 B1	Noci (1997) ^[137] , Lee et al. (2009) ^[103]
清洁材料(商品、包装)的可用性 B2	Noci (1997) ^[137] , Min and Galle (1997) ^[141] , Lee et al. (2009) ^[103] , Walton et al. (2006) ^[138]
环境绩效/污染控制/废弃物管理 B3	Noci (1997) ^[137] , Tuzkaya et al. (2009) ^[97] , Min and Galle (1997) ^[141] , Lee et al. (2009) ^[103] , Handfield et al. (2002) ^[135] , Humphreys et al.(2003) ^[133, 140] , Walton et al. (2006) ^[138]
绿色形象 B4	Noci (1997) ^[137] , Tuzkaya et al. (2009) ^[97] , Lee et al. (2009) ^[103] , Humphreys et al. (2003) ^[133, 140]
纯生命周期成本/环境成本 B5	Noci (1997) ^[137] , Tuzkaya et al. (2009) ^[97] , Min and Galle (1997) ^[141] , Lee et al. (2009) ^[103] , Humphreys et al. (2003) ^[133, 140]
绿色产品 B6	Tuzkaya et al. (2009) ^[97] , Lee et al. (2009) ^[103] , Handfield et al. (2002) ^[135]
环境和立法管理 B7	Tuzkaya et al. (2009) ^[97] , Lee et al. (2009) ^[103] , Handfield et al. (2002) ^[135] , Humphreys et al. (2003) ^[133, 140] , Walton et al. (2006) ^[138]
绿色过程管理 B8	Tuzkaya et al. (2009) ^[97] , Lee et al. (2009) ^[103] , Humphreys et al. (2003) ^[133, 140]
与供应商的环保合作情况 B9	Min and Galle (1997) ^[141]
环保使命 B10	Min and Galle (1997) ^[141]
环保规则 B11	Min and Galle (1997) ^[141] , Handfield et al. (2002) ^[135]
包装、逆向物流 B12	Handfield et al. (2002) ^[135] , Walton et al. (2006) ^[138]
环保项目 B13	Handfield et al. (2002) ^[135]
管理能力 B14	Humphreys et al.(2003) ^[133, 140]

环保记录的公开披露情况 B15	Walton et al. (2006) ^[138]
中间商环境绩效的评估 B16	Walton et al. (2006) ^[138]

从表 5-1 中可以看出，清洁材料的可用性、环境绩效、绿色形象、环境成本、绿色产品、环境和立法管理以及绿色过程管理最常被作为绿色供应商选择的影响因素。下面的雷达图更清晰的反映出各准则在研究中的常见性和重要性。

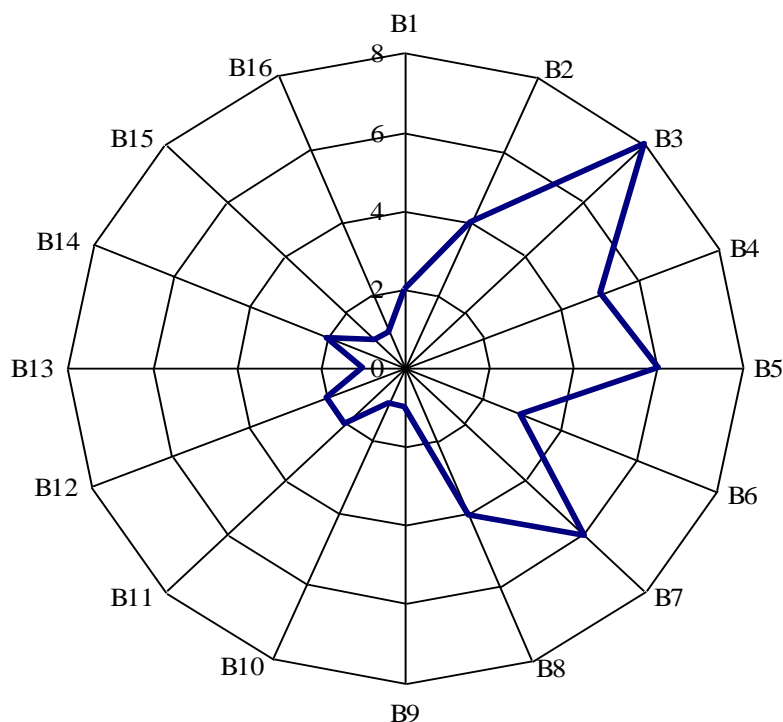


图 5-1 绿色供应商选择的常见影响因素

5.1.2 决策准则的确立

绿色供应商选择的第一步是确定选择标准，这需要通过回顾文献综述、听取供应链专家的意见以及咨询相关工作人员的实际经验来得到。在评估供应商的环境绩效时，专家的评价是很重要的一方面，原因是在仅有定量的数据时，也许可以为供应商评级并选择评分最高的一个，但由于在现实中也许存在供应商服务质量较差或股东间有冲突等定性问题，所以并不适用，本章中使用根据专家个人偏好和实际经验得到的评价准则。

相较于数字，供应商的环境绩效更容易表示为好，很好，糟糕，非常糟糕等。因此本章用语言值来评价供应商的环境绩效。专家给出评价供应商环境绩效相关准则的语言等级，用以评价各方案在各准则下的表现(表 5-2 的第一列)，并给出他们对自己的判断的确定程度(表 5-3 的第一列)，由于语言值难以进行数学运算，本章将它们转化为三角模糊数(表 5-2 和表 5-3 的第二列)，以使它们易被用于模糊多准则决策。

表 5-2 准则值的语言值

非常差(VP)	[0,0,1]
差(P)	[0,1,3]
较差(MP)	[1,3,5]
一般(F)	[3,5,7]
较好(MG)	[5,7,9]
好(G)	[7,9,10]
非常好(VG)	[9,10,10]

表 5-3 确定程度的语言值

非常低(VL)	[0,0,0.1]
低(L)	[0,0.1,0.3]
较低(ML)	[0.1,0.3,0.5]
中等(M)	[0.3,0.5,0.7]
较高(MH)	[0.5,0.7,0.9]
高(H)	[0.7,0.9,1.0]
非常高(VH)	[0.9,1.0,1.0]

表 5-4 包含十二个准则，这些准则分别是：使用环境友好技术(C_1)，环境友好材料(C_2)，绿色市场份额(C_3)，参与绿色组织的情况(C_4)，管理层对环境保护的承诺(C_5)，依附环境政策的情况(C_6)，参与绿色工程的情况(C_7)，员工培训(C_8)，精细生产计划(C_9)，面向环境设计(C_{10})，环境认证(C_{11})，污染控制(C_{12})，可见表 5-4 中的十二个准则均是效益型准则^[142]。

表 5-4 绿色供应商选择的准则

编号	准则	定义	种类
C_1	使用环保技术	保护能源/消耗化石燃料的资源的环 境友好技术的应用	效益型
C_2	使用环保材料	环境友好的商品、包装和可循环利用 材料的使用	效益型
C_3	绿色市场份额	有环保购买习惯的客户的保留情况	效益型
C_4	参与绿色组织的 情况	与绿色供应商、环境组织的合作	效益型
C_5	管理层对环境保 护的承诺	管理层对改善环境绩效的承诺和支持	效益型

C_6	依附环境政策的情况	遵从环境规章标准	效益型
C_7	参与绿色工程的情况	绿色工程的绿色制造和工序计划	效益型
C_8	员工培训	为了环保目的进行的员工培训	效益型
C_9	精细生产计划	消除浪费, 使工序流成流线型	效益型
C_{10}	面向环境设计	循环使用、再利用、再制造、分拆、处理	效益型
C_{11}	环境认证	环境认证如 ISO 14000	效益型
C_{12}	污染控制	废气、废水、固体废弃物的处理方案, 能源消耗, 有害材料的使用等	效益型

5.2 基于二型三角模糊数的绿色供应商选择

本节将前面所提到的方法应用于评价供应商的环境绩效, 进而选择出最佳的绿色供应商中。上一节中得到了 12 个关键的准则, 下面的工作是收集准则值, 根据上一节中专家给出的评价供应商环境绩效相关准则的语言等级, 现访谈某纸箱厂的相关采购人员。

据了解, 该纸箱厂的主营业务是定做各类的纸箱或其他纸箱包装产品。现该纸箱厂想找一家长期合作的瓦楞纸板供应商, 经过对比各供应商的产品、报价等情况, 综合考虑该厂自身的需求, 有 7 家瓦楞纸板供应商 A_1, A_2, \dots, A_7 符合该厂要求, 可以从中选择一家进行长期合作。

对于具体选择哪家供应商, 由于这 7 家供应商的报价相差不大, 并存在进一步洽谈的空间, 因此采购人员认为以往所采用的“价低者得”的方式并不完美。瓦楞纸板供应商大多属于高污染企业, 是建设“环境友好型”社会的首要治理目标, 污染严重的企业随时可能面临关停, 影响长期合作, 缺乏供货保证。同时, 该厂也希望选择一位环境友好的供应商, 借助供应商的好名声为企业进一步打造好的口碑。

经过上述分析, 采购人员希望知道这 7 家供应商的“绿色”情况, 并打算去找最“绿色”的供应商进一步洽谈供货周期等其他问题, 如果合适, 便会建立长期合作关系。采购人员根据实地考察等所了解到的情况, 给出了各供应商相应的语言等级, 并给出了自己的确定程度, 见表 5-5。

表 5-5 采购人员给出的语言值

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
A_1	非常差, 高	好, 非常高	较差, 中等	较好, 高	非常差, 较高	好, 高
A_2	较差, 高	好, 非常高	好, 低	一般, 高	非常好, 中等	较差, 较高
A_3	好, 高	好, 高	较好, 中等	好, 较高	非常好, 较低	一般, 较低
A_4	非常差, 较高	好, 高	较差, 低	较差, 高	好, 低	差, 低
A_5	较好, 高	好, 较高	差, 较低	差, 较低	较好, 较低	一般, 低
A_6	非常好, 较高	一般, 高	较差, 较低	较差, 高	好, 非常低	差, 中等
A_7	非常差, 较高	较好, 高	一般, 非常低	差, 高	较好, 低	一般, 中等

续表 5-5 采购人员给出的语言值

	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}
A_1	一般, 中等	一般, 低	较好, 高	一般, 较高	好, 非常高	较好, 高
A_2	好, 较高	较差, 低	非常好, 高	较好, 较低	好, 高	好, 较高
A_3	较好, 较高	差, 低	较差, 高	好, 较低	一般, 较高	较好, 高
A_4	较差, 低	一般, 中等	一般, 较低	一般, 中等	好, 高	一般, 中等
A_5	一般, 中等	较差, 中等	较差, 中等	较差, 较低	较好, 较高	差, 较低
A_6	差, 低	差, 低	好, 较高	差, 中等	一般, 较高	差, 中等
A_7	差, 较低	较差, 较低	一般, 中等	差, 较低	一般, 高	较好, 低

这些语言值难以进行运算,因此需要按照 5.1.2 节中所给出的转化表(见表 5-2

和表 5-3), 将它们转化为二型三角模糊数, 语言值转化为二型三角模糊数后的准则值见表 5-6。

表 5-6 转化为二型三角模糊数后的准则值

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
A_1	[0,0,1], [0.7,0.9,1.0]	[7,9,10], [0.9,1.0,1.0]	[1,3,5], [0.3,0.5,0.7]	[5,7,9], [0.7,0.9,1.0]	[0,0,1], [0.5,0.7,0.9]	[7,9,10], [0.7,0.9,1.0]
A_2	[1,3,5], [0.7,0.9,1.0]	[7,9,10], [0.9,1.0,1.0]	[7,9,10], [0,0.1,0.3]	[3,5,7], [0.7,0.9,1.0]	[9,10,10], [0.3,0.5,0.7]	[1,3,5], [0.5,0.7,0.9]
A_3	[7,9,10], [0.7,0.9,1.0]	[7,9,10], [0.7,0.9,1.0]	[5,7,9], [0.3,0.5,0.7]	[7,9,10], [0.5,0.7,0.9]	[9,10,10], [0.1,0.3,0.5]	[3,5,7], [0.1,0.3,0.5]
A_4	[0,0,1], [0.5,0.7,0.9]	[7,9,10], [0.7,0.9,1.0]	[1,3,5], [0,0.1,0.3]	[1,3,5], [0.7,0.9,1.0]	[7,9,10], [0,0.1,0.3]	[0,1,3], [0,0.1,0.3]
A_5	[5,7,9], [0.7,0.9,1.0]	[7,9,10], [0.5,0.7,0.9]	[0,1,3], [0.1,0.3,0.5]	[0,1,3], [0.1,0.3,0.5]	[5,7,9], [0.1,0.3,0.5]	[3,5,7], [0,0.1,0.3]
A_6	[9,10,10], [0.5,0.7,0.9]	[3,5,7], [0.7,0.9,1.0]	[1,3,5], [0.1,0.3,0.5]	[1,3,5], [0.7,0.9,1.0]	[7,9,10], [0,0,0.1]	[0,1,3], [0.3,0.5,0.7]
A_7	[0,0,1], [0.5,0.7,0.9]	[5,7,9], [0.7,0.9,1.0]	[3,5,7], [0,0,0.1]	[0,1,3], [0.7,0.9,1.0]	[5,7,9], [0,0.1,0.3]	[3,5,7], [0.3,0.5,0.7]

续表 5-6 转化为二型三角模糊数后的准则值

	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}
A_1	<[3,5,7], [0.3,0.5,0.7]>	<[3,5,7], [0,0.1,0.3]>	<[5,7,9], [0.7,0.9,1.0]>	<[3,5,7], [0.5,0.7,0.9]>	<[7,9,10], [0.9,1.0,1.0]>	<[5,7,9], [0.7,0.9,1.0]>
A_2	<[7,9,10], [0.5,0.7,0.9]>	<[1,3,5], [0,0.1,0.3]>	<[9,10,10], [0.7,0.9,1.0]>	<[5,7,9], [0.1,0.3,0.5]>	<[7,9,10], [0.7,0.9,1.0]>	<[7,9,10], [0.5,0.7,0.9]>
A_3	<[5,7,9], [0.5,0.7,0.9]>	<[0,1,3], [0,0.1,0.3]>	<[1,3,5], [0.7,0.9,1.0]>	<[7,9,10], [0.1,0.3,0.5]>	<[3,5,7], [0.5,0.7,0.9]>	<[5,7,9], [0.7,0.9,1.0]>
A_4	<[1,3,5], [0,0.1,0.3]>	<[3,5,7], [0.3,0.5,0.7]>	<[3,5,7], [0.1,0.3,0.5]>	<[3,5,7], [0.3,0.5,0.7]>	<[7,9,10], [0.7,0.9,1.0]>	<[3,5,7], [0.3,0.5,0.7]>
A_5	<[3,5,7], [0.3,0.5,0.7]>	<[1,3,5], [0.3,0.5,0.7]>	<[1,3,5], [0.3,0.5,0.7]>	<[1,3,5], [0.1,0.3,0.5]>	<[5,7,9], [0.5,0.7,0.9]>	<[0,1,3], [0.1,0.3,0.5]>
A_6	<[0,1,3], [0,0.1,0.3]>	<[0,1,3], [0,0.1,0.3]>	<[7,9,10], [0.5,0.7,0.9]>	<[0,1,3], [0.3,0.5,0.7]>	<[3,5,7], [0.5,0.7,0.9]>	<[0,1,3], [0.3,0.5,0.7]>
A_7	<[0,1,3], [0.1,0.3,0.5]>	<[1,3,5], [0.1,0.3,0.5]>	<[3,5,7], [0.3,0.5,0.7]>	<[0,1,3], [0.1,0.3,0.5]>	<[3,5,7], [0.7,0.9,1.0]>	<[5,7,9], [0,0.1,0.3]>

下面，分别用两种不同的方法来试选出最合适的供应商，一种是直接使用第三章中的信息集结方法，一种是选用第四章中的多准则决策方法。

5.2.1 基于 ITT2OWA 算子的二型三角模糊多准则决策方法

步骤 1: 构造决策矩阵 $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{m \times n}$ ，其中 $\tilde{a} = \langle [a_{ij}^1, a_{ij}^2, a_{ij}^3]; [\mu_{ij}^L, \mu_{ij}^M, \mu_{ij}^R] \rangle$ 。由于本例中的准则均为效益型，且均由语言值按同一转化表转化所得，标度相同，因此不需规范化；

步骤 2: 求解准则权重。根据公式(4-5)计算可得：

$$\omega_1=0.193; \omega_2=0.059; \omega_3=0.040; \omega_4=0.126; \omega_5=0.066; \omega_6=0.074; \\ \omega_7=0.073; \omega_8=0.021; \omega_9=0.108; \omega_{10}=0.066; \omega_{11}=0.085; \omega_{12}=0.089.$$

步骤 3: 计算方案 \tilde{a}_i 的信心水平 $\beta_i = \mu_i^L + 2\mu_i^M + \mu_i^R$ ，得到信心水平表(见表 5-7)。

表 5-7 信心水平表

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}
A_1	3.5	3.9	2	3.5	2.8	3.5	2	0.5	3.5	2.8	3.9	3.5
A_2	3.5	3.9	0.5	3.5	2	2.8	2.8	0.5	3.5	1.2	3.5	2.8
A_3	3.5	3.5	2	2.8	1.2	1.2	2.8	0.5	3.5	1.2	2.8	3.5
A_4	2.8	3.5	0.5	3.5	0.5	0.5	0.5	2	1.2	2	3.5	2
A_5	3.5	2.8	1.2	1.2	1.2	0.5	2	2	2	1.2	2.8	1.2
A_6	2.8	3.5	1.2	3.5	0.1	2	0.5	0.5	2.8	2	2.8	2
A_7	2.8	3.5	0.1	3.5	0.5	2	1.2	1.2	2	1.2	3.5	0.5

信心水平体现了决策者对于所给出的各准则下各方案的确定程度，信心水平越大，表示决策者认为这一信息的正确率越高。

步骤 4: 利用二型三角诱导 OWA 算子对方案 \tilde{a}_i 的准则值进行集结：

$$\tilde{z}_i = ITT2OWA_{\omega}(\tilde{a}_{ij}) = \sum_{j=1}^n \omega_j \tilde{a}_{i\theta(j)}$$

其中 $\theta(j)$ 是信心水平 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 中第 j 大的元素所对应的下标。

得到方案 \tilde{a}_i 的综合属性值：

$$\tilde{z}_1 = \langle [4.24, 5.95, 7.48]; [0.68, 0.83, 0.91] \rangle; \\ \tilde{z}_2 = \langle [5.84, 7.61, 8.70]; [0.53, 0.69, 0.82] \rangle; \\ \tilde{z}_3 = \langle [5.36, 7.16, 8.54]; [0.46, 0.66, 0.81] \rangle; \\ \tilde{z}_4 = \langle [3.05, 4.71, 6.29]; [0.40, 0.58, 0.73] \rangle; \\ \tilde{z}_5 = \langle [2.97, 4.79, 6.73]; [0.37, 0.56, 0.73] \rangle; \\ \tilde{z}_6 = \langle [2.81, 4.45, 6.16]; [0.40, 0.57, 0.72] \rangle;$$

$$\tilde{z}_7 = \langle [2.55, 4.06, 5.93]; [0.34, 0.49, 0.64] \rangle;$$

二型三角诱导 OWA 算子首先根据信心水平对方案进行排序，然后集结新的数列，得到的结果既考虑了数值本身，又考虑了数值的正确率。

步骤 5: 利用 2.2.4 节中的可能度公式进行两两比较，得到两两比较表，见表 5-8;

表 5-8 两两比较表

	\tilde{z}_1	\tilde{z}_2	\tilde{z}_3	\tilde{z}_4	\tilde{z}_5	\tilde{z}_6	\tilde{z}_7
\tilde{z}_1	0.5	0.62	0.40	0	0	0	0
\tilde{z}_2	0.38	0.5	0.25	0	0	0	0
\tilde{z}_3	0.60	0.75	0.5	0	0	0	0
\tilde{z}_4	1	1	1	0.5	0.49	0.41	0.13
\tilde{z}_5	1	1	1	0.51	0.5	0.42	0.16
\tilde{z}_6	1	1	1	0.59	0.58	0.5	0.22
\tilde{z}_7	1	1	1	0.87	0.84	0.78	0.5

因此 $\tilde{z}_2 > \tilde{z}_1 > \tilde{z}_3 > \tilde{z}_4 > \tilde{z}_5 > \tilde{z}_6 > \tilde{z}_7$ 。

综合属性值 \tilde{z}_i 是在考虑准则值本身的大小、准则值的正确率以及准则的重要性之后得到的综合结果，某准则值越大说明某方案在该准则下的表现越优秀，某准则值的正确率越高表明以该准则值来做决策所得到的结果越能反映真实情况，某准则越重要表示该准则更对现实结果的影响越大，越应该重点考虑，因此，综合属性值 \tilde{z}_i 越大，表示其所对应的方案越优。

进而得到方案的排序： $A_2 \succ A_1 \succ A_3 \succ A_4 \succ A_5 \succ A_6 \succ A_7$ ，

由此可以看出，最佳供应商为 A_2 。

5.2.2 基于聚类的二型三角模糊多准则决策方法

步骤 1: 构造决策矩阵 $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{m \times n}$ ，其中 $\tilde{a} = \langle [a_{ij}^1, a_{ij}^2, a_{ij}^3]; [\mu_{ij}^L, \mu_{ij}^M, \mu_{ij}^R] \rangle$ 。由于本例中的准则均为效益型，且均由语言值按同一转化表转化所得，标度相同，因此不需规范化；

步骤 2: 求解准则权重。根据公式(4-5)计算可得：

$$\omega_1=0.193; \omega_2=0.059; \omega_3=0.040; \omega_4=0.126; \omega_5=0.066; \omega_6=0.074;$$

$$\omega_7=0.073; \omega_8=0.021; \omega_9=0.108; \omega_{10}=0.066; \omega_{11}=0.085; \omega_{12}=0.089.$$

步骤 3: 确定每一准则下的理想方案 A_j^+ 和负理想方案 A_j^- ；

根据可能度公式两两比较，得到可能度矩阵 $\tilde{P} = [\tilde{p}_{ij}]_{m \times n}$ ，从而得到每一准则下的正理想方案 A_j^+ 和负理想方案 A_j^- 。见表 5-9:

表 5-9 可能度及最优方案表

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}
$A_1 > A_2$	0	0.5	0.84	1	0	1	0	1	0	1	0.82	0.5
$A_1 > A_3$	0	0.82	0	0.5	0	1	0	1	1	0.97	1	0.5
$A_1 > A_4$	0.56	0.82	1	1	0	1	1	0	1	0.92	0.82	1
$A_1 > A_5$	0	1	1	1	0	1	0.5	0	1	1	1	1
$A_1 > A_6$	0	1	0.88	1	0.39	1	1	1	0.5	1	1	1
$A_1 > A_7$	0.56	1	1	1	0	1	1	0.18	1	1	1	1
$A_2 > A_3$	0	0.82	0	0	1	0.8	1	1	1	0	1	0.5
$A_2 > A_4$	1	0.82	1	1	1	1	1	0	1	0.25	0.5	1
$A_2 > A_5$	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1
$A_2 > A_6$	0	1	0.75	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$A_2 > A_7$	1	1	1	1	1	0.33	1	0	1	1	1	1
$A_3 > A_4$	1	0.5	1	1	1	1	1	0	0.98	0.59	0	1
$A_3 > A_5$	1	1	1	1	1	1	1	0	0.91	1	0	1
$A_3 > A_6$	1	1	1	1	1	1	1	0.5	0	1	0.5	1
$A_3 > A_7$	1	1	1	1	1	0	1	0	0.55	1	0.22	1
$A_4 > A_5$	0	1	0.5	1	0	0	0	1	0.5	1	1	1
$A_4 > A_6$	0	1	0	0.5	1	0	1	1	0	1	1	1
$A_4 > A_7$	0.5	1	1	1	1	0	0.5	1	0	1	1	1
$A_5 > A_6$	0.17	1	0	0	1	0.5	1	1	0	0.7	1	0.29
$A_5 > A_7$	1	0.5	1	0.09	1	0	1	0.88	0	1	0.67	0
$A_6 > A_7$	1	0	1	1	0	0	0.16	0	1	0.71	0.22	0.25
A_j^+	A_3	A_2	A_3	A_3	A_2	A_1	A_2	A_4	A_2	A_1	A_1	A_1
A_j^-	A_4	A_6	A_7	A_5	A_1	A_4	A_6	A_3	A_4	A_7	A_3	A_5

在每一准则下通过两两比较可以得到最好和最差的方案, 这些方案是决策过程中的相对理想点。

步骤 4: 根据公式(4-6)和(4-7)计算各备选方案的整体效益值 S_i 和个别遗憾值 R_i ;

$$S_1 = \langle [-0.03, 0.47, 1.36]; [0.32, 0.58, 0.79] \rangle;$$

$$S_2 = \langle [-0.2, 0.16, 0.99]; [0.44, 0.76, 0.99] \rangle;$$

$$S_3 = \langle [-0.21, 0.25, 1.24]; [0.39, 0.66, 0.86] \rangle;$$

$$S_4 = \langle [0.08, 0.64, 1.79]; [0.31, 0.55, 0.77] \rangle;$$

$$\begin{aligned}
 S_5 &= \langle [0.03, 0.71, 1.88]; [0.27, 0.5, 0.73] \rangle; \\
 S_6 &= \langle [0.02, 0.65, 1.55]; [0.32, 0.55, 0.77] \rangle; \\
 S_7 &= \langle [0.15, 0.79, 1.8]; [0.33, 0.57, 0.79] \rangle; \\
 R_1 &= \langle [0.12, 0.19, 0.32]; [0.49, 0.81, 1] \rangle; \\
 R_2 &= \langle [0.04, 0.13, 0.29]; [0.49, 0.81, 1] \rangle; \\
 R_3 &= \langle [0.06, 0.15, 0.49]; [0.35, 0.63, 0.83] \rangle; \\
 R_4 &= \langle [0.12, 0.19, 0.32]; [0.48, 0.8, 0.99] \rangle; \\
 R_5 &= \langle [0.06, 0.15, 0.49]; [0.3, 0.56, 0.77] \rangle; \\
 R_6 &= \langle [0.02, 0.09, 0.4]; [0.39, 0.68, 0.88] \rangle; \\
 R_7 &= \langle [0.12, 0.19, 0.32]; [0.48, 0.8, 0.99] \rangle.
 \end{aligned}$$

整体效益值反映了某准则下各方案对整体效益的贡献，个别遗憾值反映了某准则下选择某方案可能导致的后悔成分。因此，某方案使整体效益值越大，表示该方案越优，同时，某方案使个别遗憾值越小，表示该方案越优。

步骤 5: 由于 S_i 值越小整体效益越大， R_i 值越小个别遗憾越小，因此 S_i 中的最小值 S^* 和 R_i 中的最小值 R^* 使方案达到最优， S_i 中的最大值 S_* 和 R_i 中的最大值 R_* 使方案最差。找出 S_i 中的最小值 S^* 和最大值 S_* 及 R_i 中的最小值 R^* 和最大值 R_* ；

$$\begin{aligned}
 S^* &= \langle [-0.2, 0.16, 0.99]; [0.44, 0.76, 0.99] \rangle; \\
 S_* &= \langle [0.15, 0.79, 1.8]; [0.33, 0.57, 0.79] \rangle; \\
 R^* &= \langle [0.02, 0.09, 0.4]; [0.39, 0.68, 0.88] \rangle; \\
 R_* &= \langle [0.12, 0.19, 0.32]; [0.49, 0.81, 1] \rangle.
 \end{aligned}$$

步骤 6: 可见，理想方案为 $T^* = (S_2, R_6)$ ，负理想方案 $T_* = (S_7, R_1)$ 。将原方案集中的方案表示为 $T_i = (S_i, R_i)$ 的形式，并将这两个假设的方案加入原方案集中得到新方案集 $\{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T^*, T_*\}$ 。

步骤 7: 计算新方案集中方案间的相似度；

表 5-10 方案间的相似度表

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T^*	T_*
T_1	1	0.92	0.93	0.95	0.93	0.93	0.91	0.91	0.91
T_2	0.92	1	0.97	0.86	0.88	0.87	0.83	0.97	0.83
T_3	0.93	0.97	1	0.88	0.91	0.91	0.85	0.96	0.85
T_4	0.95	0.86	0.88	1	0.97	0.95	0.97	0.85	0.97
T_5	0.93	0.88	0.91	0.97	1	0.98	0.93	0.88	0.93
T_6	0.93	0.87	0.91	0.95	0.98	1	0.91	0.90	0.91
T_7	0.91	0.83	0.85	0.97	0.93	0.91	1	0.82	1

T^*	0.91	0.97	0.96	0.85	0.88	0.90	0.82	1	0.82
T_*	0.91	0.83	0.85	0.97	0.93	0.91	1	0.82	1

与假想的理想方案相似度越大的方案越优，相似度越小的方案越差；与假想的负理想方案相似度越小的方案越优，相似度越大的方案越差。

步骤 8: 下面用聚类的方法对上述方案进行分类。显然表 5-10 中主对角线上的元素为 1 且转置后矩阵不变，即其具有自反性和对称性。现求其 \tilde{B}^2 ，采用取小取大算子($\wedge \vee$):

$$\tilde{B}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0.92 & 0.93 & 0.95 & 0.93 & 0.93 & 0.91 & 0.91 & 0.91 \\ 0.92 & 1 & 0.97 & 0.86 & 0.88 & 0.87 & 0.83 & 0.97 & 0.83 \\ 0.93 & 0.97 & 1 & 0.88 & 0.91 & 0.91 & 0.85 & 0.96 & 0.85 \\ 0.95 & 0.86 & 0.88 & 1 & 0.97 & 0.95 & 0.97 & 0.85 & 0.97 \\ 0.93 & 0.88 & 0.91 & 0.97 & 1 & 0.98 & 0.93 & 0.88 & 0.93 \\ 0.93 & 0.87 & 0.91 & 0.95 & 0.98 & 1 & 0.91 & 0.90 & 0.91 \\ 0.91 & 0.83 & 0.85 & 0.97 & 0.93 & 0.91 & 1 & 0.82 & 1 \\ 0.91 & 0.97 & 0.96 & 0.85 & 0.88 & 0.90 & 0.82 & 1 & 0.82 \\ 0.91 & 0.83 & 0.85 & 0.97 & 0.93 & 0.91 & 1 & 0.82 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\circ \begin{bmatrix} 1 & 0.92 & 0.93 & 0.95 & 0.93 & 0.93 & 0.91 & 0.91 & 0.91 \\ 0.92 & 1 & 0.97 & 0.86 & 0.88 & 0.87 & 0.83 & 0.97 & 0.83 \\ 0.93 & 0.97 & 1 & 0.88 & 0.91 & 0.91 & 0.85 & 0.96 & 0.85 \\ 0.95 & 0.86 & 0.88 & 1 & 0.97 & 0.95 & 0.97 & 0.85 & 0.97 \\ 0.93 & 0.88 & 0.91 & 0.97 & 1 & 0.98 & 0.93 & 0.88 & 0.93 \\ 0.93 & 0.87 & 0.91 & 0.95 & 0.98 & 1 & 0.91 & 0.90 & 0.91 \\ 0.91 & 0.83 & 0.85 & 0.97 & 0.93 & 0.91 & 1 & 0.82 & 1 \\ 0.91 & 0.97 & 0.96 & 0.85 & 0.88 & 0.90 & 0.82 & 1 & 0.82 \\ 0.91 & 0.83 & 0.85 & 0.97 & 0.93 & 0.91 & 1 & 0.82 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0.93 & 0.93 & 0.95 & 0.95 & 0.95 & 0.95 & 0.93 & 0.95 \\ 0.93 & 1 & 0.97 & 0.92 & 0.92 & 0.92 & 0.91 & 0.97 & 0.91 \\ 0.93 & 0.97 & 1 & 0.93 & 0.93 & 0.93 & 0.91 & 0.97 & 0.91 \\ 0.95 & 0.92 & 0.93 & 1 & 0.97 & 0.97 & 0.97 & 0.91 & 0.97 \\ 0.95 & 0.92 & 0.93 & 0.97 & 1 & 0.98 & 0.97 & 0.91 & 0.97 \\ 0.95 & 0.92 & 0.93 & 0.97 & 0.98 & 1 & 0.95 & 0.91 & 0.95 \\ 0.95 & 0.91 & 0.91 & 0.97 & 0.97 & 0.95 & 1 & 0.91 & 1 \\ 0.93 & 0.97 & 0.97 & 0.91 & 0.91 & 0.91 & 0.91 & 1 & 0.91 \\ 0.95 & 0.91 & 0.91 & 0.97 & 0.97 & 0.95 & 1 & 0.91 & 1 \end{bmatrix}$$

$\tilde{B}^2 \neq \tilde{B}$ ，不是模糊等价矩阵，因此继续求解：

$$\tilde{B}^4 = \tilde{B}^2 \circ \tilde{B}^2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0.93 & 0.93 & 0.95 & 0.95 & 0.95 & 0.95 & 0.93 & 0.95 \\ 0.93 & 1 & 0.97 & 0.92 & 0.92 & 0.92 & 0.91 & 0.97 & 0.91 \\ 0.93 & 0.97 & 1 & 0.93 & 0.93 & 0.93 & 0.91 & 0.97 & 0.91 \\ 0.95 & 0.92 & 0.93 & 1 & 0.97 & 0.97 & 0.97 & 0.91 & 0.97 \\ 0.95 & 0.92 & 0.93 & 0.97 & 1 & 0.98 & 0.97 & 0.91 & 0.97 \\ 0.95 & 0.92 & 0.93 & 0.97 & 0.98 & 1 & 0.95 & 0.91 & 0.95 \\ 0.95 & 0.91 & 0.91 & 0.97 & 0.97 & 0.95 & 1 & 0.91 & 1 \\ 0.93 & 0.97 & 0.97 & 0.91 & 0.91 & 0.91 & 0.91 & 1 & 0.91 \\ 0.95 & 0.91 & 0.91 & 0.97 & 0.97 & 0.95 & 1 & 0.91 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\circ \begin{bmatrix} 1 & 0.93 & 0.93 & 0.95 & 0.95 & 0.95 & 0.95 & 0.93 & 0.95 \\ 0.93 & 1 & 0.97 & 0.92 & 0.92 & 0.92 & 0.91 & 0.97 & 0.91 \\ 0.93 & 0.97 & 1 & 0.93 & 0.93 & 0.93 & 0.91 & 0.97 & 0.91 \\ 0.95 & 0.92 & 0.93 & 1 & 0.97 & 0.97 & 0.97 & 0.91 & 0.97 \\ 0.95 & 0.92 & 0.93 & 0.97 & 1 & 0.98 & 0.97 & 0.91 & 0.97 \\ 0.95 & 0.92 & 0.93 & 0.97 & 0.98 & 1 & 0.95 & 0.91 & 0.95 \\ 0.95 & 0.91 & 0.91 & 0.97 & 0.97 & 0.95 & 1 & 0.91 & 1 \\ 0.93 & 0.97 & 0.97 & 0.91 & 0.91 & 0.91 & 0.91 & 1 & 0.91 \\ 0.95 & 0.91 & 0.91 & 0.97 & 0.97 & 0.95 & 1 & 0.91 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0.93 & 0.93 & 0.95 & 0.95 & 0.95 & 0.95 & 0.93 & 0.95 \\ 0.93 & 1 & 0.97 & 0.93 & 0.93 & 0.93 & 0.93 & 0.97 & 0.93 \\ 0.93 & 0.97 & 1 & 0.93 & 0.93 & 0.93 & 0.93 & 0.97 & 0.93 \\ 0.95 & 0.93 & 0.93 & 1 & 0.97 & 0.97 & 0.97 & 0.93 & 0.97 \\ 0.95 & 0.93 & 0.93 & 0.97 & 1 & 0.98 & 0.97 & 0.93 & 0.97 \\ 0.95 & 0.93 & 0.93 & 0.97 & 0.98 & 1 & 0.97 & 0.93 & 0.97 \\ 0.95 & 0.93 & 0.93 & 0.97 & 0.97 & 0.97 & 1 & 0.93 & 1 \\ 0.93 & 0.97 & 0.97 & 0.93 & 0.93 & 0.93 & 0.93 & 1 & 0.93 \\ 0.95 & 0.93 & 0.93 & 0.97 & 0.97 & 0.97 & 1 & 0.93 & 1 \end{bmatrix}$$

$\tilde{B}^4 \neq \tilde{B}^2$; 不是模糊等价矩阵, 继续求解:

$$\tilde{B}^8 = \tilde{B}^4 \circ \tilde{B}^4$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 1 & 0.93 & 0.93 & 0.95 & 0.95 & 0.95 & 0.95 & 0.93 & 0.95 \\ 0.93 & 1 & 0.97 & 0.93 & 0.93 & 0.93 & 0.93 & 0.97 & 0.93 \\ 0.93 & 0.97 & 1 & 0.93 & 0.93 & 0.93 & 0.93 & 0.97 & 0.93 \\ 0.95 & 0.93 & 0.93 & 1 & 0.97 & 0.97 & 0.97 & 0.93 & 0.97 \\ 0.95 & 0.93 & 0.93 & 0.97 & 1 & 0.98 & 0.97 & 0.93 & 0.97 \\ 0.95 & 0.93 & 0.93 & 0.97 & 0.98 & 1 & 0.97 & 0.93 & 0.97 \\ 0.95 & 0.93 & 0.93 & 0.97 & 0.97 & 0.97 & 1 & 0.93 & 1 \\ 0.93 & 0.97 & 0.97 & 0.93 & 0.93 & 0.93 & 0.93 & 1 & 0.93 \\ 0.95 & 0.93 & 0.93 & 0.97 & 0.97 & 0.97 & 1 & 0.93 & 1 \end{bmatrix} \\
 & \circ \begin{bmatrix} 1 & 0.93 & 0.93 & 0.95 & 0.95 & 0.95 & 0.95 & 0.93 & 0.95 \\ 0.93 & 1 & 0.97 & 0.93 & 0.93 & 0.93 & 0.93 & 0.97 & 0.93 \\ 0.93 & 0.97 & 1 & 0.93 & 0.93 & 0.93 & 0.93 & 0.97 & 0.93 \\ 0.95 & 0.93 & 0.93 & 1 & 0.97 & 0.97 & 0.97 & 0.93 & 0.97 \\ 0.95 & 0.93 & 0.93 & 0.97 & 1 & 0.98 & 0.97 & 0.93 & 0.97 \\ 0.95 & 0.93 & 0.93 & 0.97 & 0.98 & 1 & 0.97 & 0.93 & 0.97 \\ 0.95 & 0.93 & 0.93 & 0.97 & 0.97 & 0.97 & 1 & 0.93 & 1 \\ 0.93 & 0.97 & 0.97 & 0.93 & 0.93 & 0.93 & 0.93 & 1 & 0.93 \\ 0.95 & 0.93 & 0.93 & 0.97 & 0.97 & 0.97 & 1 & 0.93 & 1 \end{bmatrix} \\
 & = \begin{bmatrix} 1 & 0.93 & 0.93 & 0.95 & 0.95 & 0.95 & 0.95 & 0.93 & 0.95 \\ 0.93 & 1 & 0.97 & 0.93 & 0.93 & 0.93 & 0.93 & 0.97 & 0.93 \\ 0.93 & 0.97 & 1 & 0.93 & 0.93 & 0.93 & 0.93 & 0.97 & 0.93 \\ 0.95 & 0.93 & 0.93 & 1 & 0.97 & 0.97 & 0.97 & 0.93 & 0.97 \\ 0.95 & 0.93 & 0.93 & 0.97 & 1 & 0.98 & 0.97 & 0.93 & 0.97 \\ 0.95 & 0.93 & 0.93 & 0.97 & 0.98 & 1 & 0.97 & 0.93 & 0.97 \\ 0.95 & 0.93 & 0.93 & 0.97 & 0.97 & 0.97 & 1 & 0.93 & 1 \\ 0.93 & 0.97 & 0.97 & 0.93 & 0.93 & 0.93 & 0.93 & 1 & 0.93 \\ 0.95 & 0.93 & 0.93 & 0.97 & 0.97 & 0.97 & 1 & 0.93 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$\tilde{B}^8 = \tilde{B}^4$ ，因此 \tilde{B}^8 是模糊等价矩阵。

从 \tilde{B}^8 出发对元素进行模糊聚类：

1 取 $0.98 < \lambda \leq 1$ ，得：

$$\tilde{B}_\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

按该水平, $b_{79} = b_{97} = 1$, 可将 T_7, T_9 归为一类, 其余元素各自成一类, 共分成 8 类:

$$T = \{T_1\} \cup \{T_2\} \cup \{T_3\} \cup \{T_4\} \cup \{T_5\} \cup \{T_6\} \cup \{T_7, T_9\} \cup \{T^*\};$$

2 取 $0.97 < \lambda \leq 0.98$

$$\tilde{B}_\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

按该水平, $b_{56} = b_{65} = 1$, $b_{79} = b_{97} = 1$, 可将 T_5, T_6 归为一类, T_7, T_9 归为一类, 其余元素各自成一类, 共分成 7 类:

$$T = \{T_1\} \cup \{T_2\} \cup \{T_3\} \cup \{T_4\} \cup \{T_5, T_6\} \cup \{T_7, T_9\} \cup \{T^*\};$$

3 取 $0.95 < \lambda \leq 0.97$

$$\tilde{B}_\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

按该水平, $b_{45} = b_{54} = b_{46} = b_{64} = b_{47} = b_{74} = b_{56} = b_{65} = b_{57} = b_{75} = b_{67} = b_{76} = 1$,

$b_{49} = b_{94} = b_{59} = b_{95} = b_{69} = b_{96} = b_{79} = b_{97} = 1$, $b_{23} = b_{32} = b_{28} = b_{82} = b_{38} = b_{83} = 1$, 可将 T_4, T_5, T_6, T_7, T^* 归为一类, T_2, T_3, T^* 归为一类, 其余元素各自成一类, 共分成 3 类:

$$T = \{T_1\} \cup \{T_2, T_3, T^*\} \cup \{T_4, T_5, T_6, T_7, T^*\};$$

4 取 $0.93 < \lambda \leq 0.95$

$$\tilde{B}_\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

按该水平:

$b_{14} = b_{15} = b_{16} = b_{17} = b_{45} = b_{46} = b_{47} = b_{56} = b_{57} = b_{67} = 1$, $b_{49} = b_{59} = b_{69} = b_{79} = 1$, $b_{23} = b_{28} = b_{38} = 1$, 可将 $T_1, T_4, T_5, T_6, T_7, T^*$ 归为一类, T_2, T_3, T^* 归为一类, 共分成 2 类:

$$T = \{T_2, T_3, T^*\} \cup \{T_1, T_4, T_5, T_6, T_7, T^*\};$$

5 取 $0 < \lambda \leq 0.93$

$$\tilde{B}_\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

按该水平, 可将 $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T^*, T^*$ 归为一类, 共分成 1 类:

$$T = \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T^*, T^*\};$$

T_7 最先与负理想方案 T^* 归为一类, T_5, T_6 先归为一类, 然后 T_4, T_5, T_6, T_7 与负理想方案 T^* 归为一类, T_2, T_3 与理想方案 T^* 归为一类, 再然后, T_1, T_4, T_5, T_6, T_7 与负理想方案 T^* 归为一类, 最后所有方案归为一类。

因此, 最先与理想方案 T^* 归为一类的 T_2, T_3 是最优的, 最先与负理想方案 T^* 归为一类的 T_7 是最差的, 第二与负理想方案 T^* 归为一类的 T_4, T_5, T_6 是次差的, T_1 位于最优的 T_2, T_3 和次差的 T_4, T_5, T_6 之间。

从上述分析得到, 最优的方案为 A_2, A_3 , 其次是 A_1 , 再次是 A_4, A_5, A_6 , 最差的为 A_7 , 所以应选择供应商 A_2 或 A_3 。

5.3 比较和分析

为了更直观的分析上述结果, 下面用最简单的加权平均的方式($TT2WAA$ 算子)计算出一个结果:

步骤 1: 构造决策矩阵 $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{m \times n}$, 其中 $\tilde{a} = \langle [a_{ij}^1, a_{ij}^2, a_{ij}^3]; [\mu_{ij}^L, \mu_{ij}^M, \mu_{ij}^R] \rangle$ 。由于本例中的准则均为效益型, 且均由语言值按同一转化表转化所得, 标度相同, 因此不需规范化;

步骤 2: 本例中的准则权重属于未知, 因此应该首先求得准则权重。权重计算考虑两个方面的问题: 准则 j 在方案中的隶属度越大, 那么此准则越能体现该方案的特点, 权重越大, 同时, 各方案在准则 j 下的区分度越大, 那么表明该准则区分方案的能力越强, 权重越大。因此选用 4.1.2 节中提供的求解方法。根据公式(4-5)计算可得:

$$\omega_1=0.193; \omega_2=0.059; \omega_3=0.040; \omega_4=0.126; \omega_5=0.066; \omega_6=0.074; \\ \omega_7=0.073; \omega_8=0.021; \omega_9=0.108; \omega_{10}=0.066; \omega_{11}=0.085; \omega_{12}=0.089.$$

步骤 3: 利用 $TT2WAA$ 算子将综合决策矩阵的第 i 行元素集成:

$$\tilde{z}_i = TT2WAA_{\omega}(\tilde{a}_{i1}, \tilde{a}_{i2}, \dots, \tilde{a}_{in}) = \sum_{j=1}^n \omega_j \tilde{a}_{ij}$$

得到方案 \tilde{a}_i 的综合属性值:

$$\tilde{z}_1 = \langle [3.66, 5.14, 6.67]; [0.68, 0.86, 0.95] \rangle; \\ \tilde{z}_2 = \langle [4.98, 6.81, 8.12]; [0.54, 0.73, 0.87] \rangle; \\ \tilde{z}_3 = \langle [5.30, 7.21, 8.63]; [0.49, 0.69, 0.84] \rangle; \\ \tilde{z}_4 = \langle [2.56, 4.10, 5.70]; [0.36, 0.54, 0.70] \rangle; \\ \tilde{z}_5 = \langle [2.77, 4.51, 6.46]; [0.40, 0.59, 0.76] \rangle; \\ \tilde{z}_6 = \langle [3.55, 5.04, 6.48]; [0.44, 0.61, 0.79] \rangle; \\ \tilde{z}_7 = \langle [2.01, 3.36, 5.17]; [0.29, 0.45, 0.62] \rangle;$$

步骤 4: 根据 2.2.3 节中二型三角模糊数的记分函数计算出各方案综合属性值 \tilde{z}_i 的记分函数 $S(\tilde{z}_i)$;

$$S(\tilde{z}_1)=69; S(\tilde{z}_2)=77; S(\tilde{z}_3)=77; S(\tilde{z}_4)=35; S(\tilde{z}_5)=43; S(\tilde{z}_6)=49; S(\tilde{z}_7)=25$$

步骤 5: 根据 2.2.3 节中的比较方法对 \tilde{z}_i 进行排序:

$$\tilde{z}_3 = \tilde{z}_2 > \tilde{z}_1 > \tilde{z}_6 > \tilde{z}_5 > \tilde{z}_4 > \tilde{z}_7;$$

进而方案的排序为 $A_3 = A_2 \succ A_1 \succ A_6 \succ A_5 \succ A_4 \succ A_7$,

最佳供应商为 A_2 或 A_3 。

现在我们将 5.2 节中的两个结果和本节中的结果放在一起对比：

$ITT2OWA$ 算子计算出的结果为 $A_2 > A_1 > A_3 > A_4 > A_5 > A_6 > A_7$ ；

聚类的结果为最优的方案为 A_2, A_3 ，其次是 A_1 ，再次是 A_4, A_5, A_6 ，最差的为 A_7 ；

本节中加权平均的结果为 $A_3 = A_2 > A_1 > A_6 > A_5 > A_4 > A_7$ 。

$ITT2OWA$ 算子计算出的结果与后两种方法得到的结果不同，这是因为 $ITT2OWA$ 算子考虑到了一切可能影响数据排列的因素，在计算时加入了信心水平，它决定了数据的权重，而正是这个诱导信息影响了最后结果。当决策者的信心水平对结果影响较为严重时，这种影响将更加明显。 $ITT2OWA$ 算子适用于决策者对于各被决策事物的了解程度相差较大的情况，以本例为例，决策者对于各供应商的了解程度各不相同，决策者已经和一些供应商合作过，也实地考察过，而对另一些供应商仅是通过广告和标书的了解，没有实地考察过。对于不了解的供应商，其给出的决策信息含有猜测成分，决策者的确定程度小，因此决策者显然会倾向于他更了解的供应商。如果两家供应商的表现相同，决策者会选择更熟悉的一家，但是如果不熟悉的那家表现明显优于熟悉的这家，决策者也会选择不熟悉的这一家，这种状态便通过诱导算子来调节。

聚类得到的结果和加权平均的结果相同，而加权平均方法是通过数字的运算和比较，只考虑了对备选方案的排序问题，不能对方案进行分类，这样的方案排序不能体现方案间的相似性和层次关系，但它可以给出一个完整的排序，使每个方案的名次清晰可见；聚类得到的结果没有给出一个完整的排序，有些方案的名次不好确定，但是它较好的反应了方案间的层次关系，将方案由最优到最差分为 4 个等级，每个等级由一个或多个方案构成，一个等级内的方案虽然各个细节都不同，但给与决策者的综合效益是相似的。对于这些无法定量计算且模糊度高的决策问题，有时精确的数字计算反而容易使决策者陷入误区，而模糊聚类则弥补了这种不足，给与决策者方案间的优劣层次，这种层次结果在处理模糊问题时更为可靠。这种按方案优劣进行层次分类的效果是其他决策方法达不到的。

综合看上述三种结果可以发现，无论是否考虑信心水平，改变方案排序的只有 A_1, A_2, A_3 间的名次和 A_4, A_5, A_6 间的名次，这也再次印证了聚类的可靠性，虽然不同的决策方法对排序结果影响很大，但是总体的方案层次却很少改变， A_1, A_2, A_3 这三个方案属于第一等， A_4, A_5, A_6 这三个方案属于第二等，最差的是 A_7 。而这种层次关系在另外两种决策方法中没有体现，如果没有注意到这种层次关系，单独看另外两种决策方法，会感觉方案排序变化很大，会使决策者迷茫。

回顾采购人员给出的准则值(见表 5-5)，首先来分析 A_1, A_2, A_3 ：

A_1 的准则值含有 0 个非常好，3 个好，3 个较好，3 个一般，1 个较差，0 个

差，2 个非常差；确定程度含有 2 个非常高，5 个高，2 个较高，2 个中等，0 个较低，1 个低，0 个非常低；

A_2 的准则值含有 2 个非常好，5 个好，1 个较好，1 个一般，3 个较差，0 个差，0 个非常差；确定程度含有 1 个非常高，4 个高，3 个较高，1 个中等，1 个较低，2 个低，0 个非常低；

A_3 的准则值含有 1 个非常好，4 个好，3 个较好，2 个一般，1 个较差，1 个差，0 个非常差；确定程度含有 0 个非常高，4 个高，3 个较高，1 个中等，3 个较低，1 个低，0 个非常低；

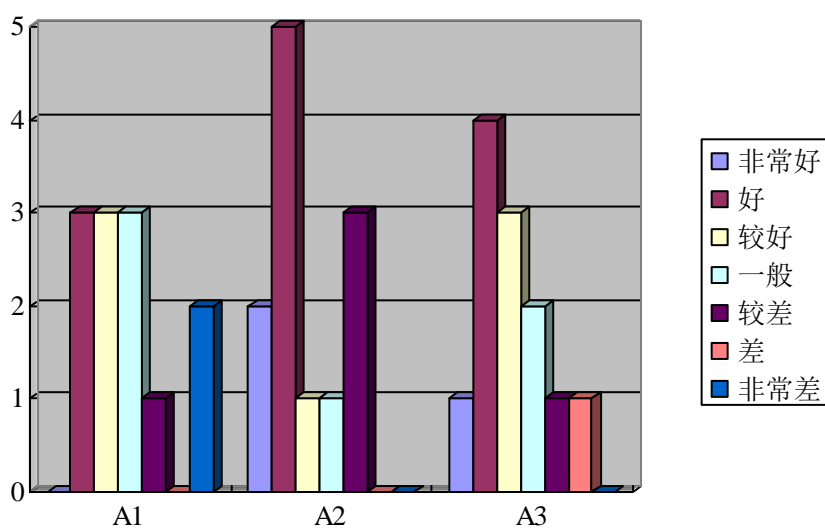


图 5-2 A_1, A_2, A_3 的准则值

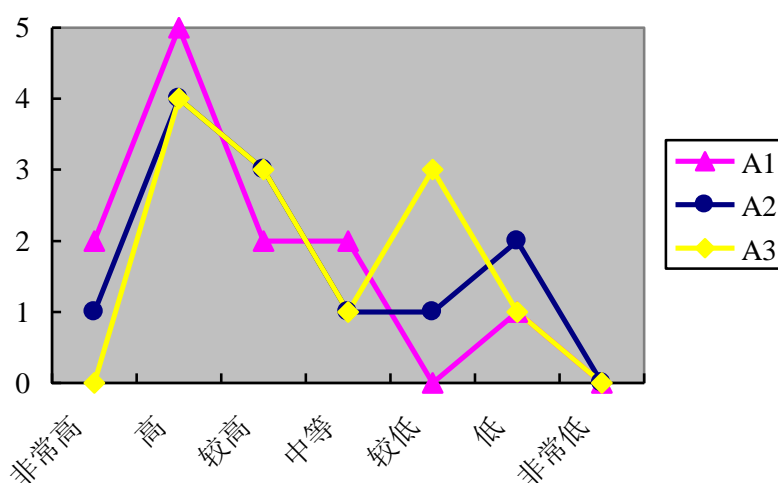


图 5-3 A_1, A_2, A_3 的确定程度

可见， A_2, A_3 的准则值明显比 A_1 的准则值表现好，而 A_2 的准则值表现优于 A_3 ；但 A_2, A_3 的确定程度不如 A_1 ， A_2 的确定程度优于 A_3 。由此可以看出，准则值对决策结果的影响比确定程度大，现在的分析是给与了每个准则相同的权重，但是在决策中并非如此，因此在加权平均方法和聚类方法中，当加入准则权重这一因素

后, A_2, A_3 同为最优, 而在 $ITT2OWA$ 算子方法中, 由于其根据信心水平作为诱导信息, 因此平衡掉了一些准则权重的影响, 使得 A_2, A_3 变得可以比较, A_2 优于 A_3 。

其次再来分析 A_4, A_5, A_6 :

A_4 的准则值含有 0 个非常好, 3 个好, 0 个较好, 4 个一般, 3 个较差, 1 个差, 1 个非常差; 确定程度含有 0 个非常高, 3 个高, 1 个较高, 3 个中等, 1 个较低, 4 个低, 0 个非常低;

A_5 的准则值含有 0 个非常好, 1 个好, 3 个较好, 2 个一般, 3 个较差, 3 个差, 0 个非常差; 确定程度含有 0 个非常高, 1 个高, 2 个较高, 3 个中等, 5 个较低, 1 个低, 0 个非常低;

A_6 的准则值含有 1 个非常好, 2 个好, 0 个较好, 2 个一般, 2 个较差, 5 个差, 0 个非常差; 确定程度含有 0 个非常高, 2 个高, 3 个较高, 3 个中等, 1 个较低, 2 个低, 1 个非常低;

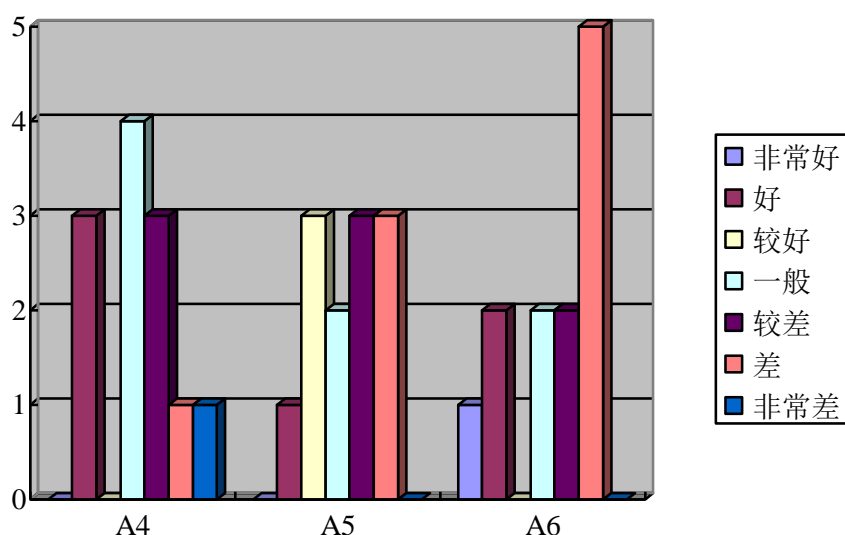


图 5-4 A_4, A_5, A_6 的准则值

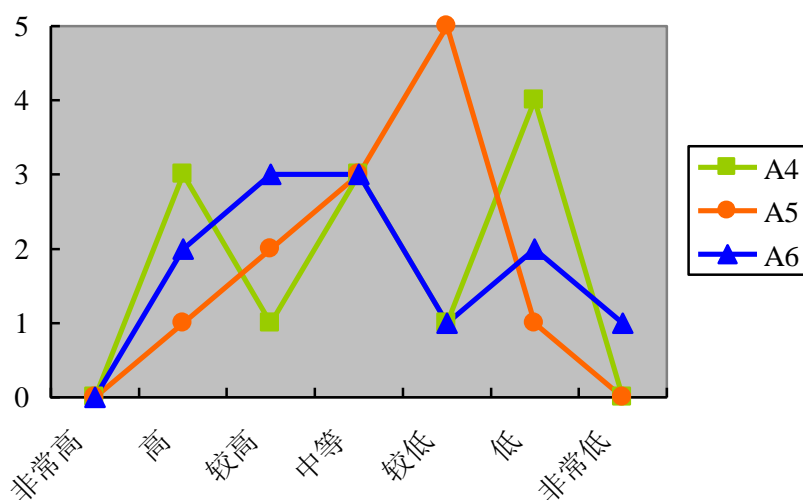


图 5-5 A_4, A_5, A_6 的确定程度

可见， A_4 的准则值优于 A_5, A_6 ，而 A_5, A_6 的准则值表现相似； A_4, A_5 的确定程度相似， A_6 的确定程度优于 A_4, A_5 。

由于这三个方案的差别很小，因此在聚类方法中是直接聚为一类，尤其是 A_5, A_6 ，最先聚为一类，符合分析情况。这也再次印证了准则值对决策结果的影响比确定程度大。

最后是 A_7 的情况：

A_7 的准则值含有 0 个非常好，0 个好，3 个较好，4 个一般，1 个较差，3 个差，1 个非常差；确定程度含有 0 个非常高，3 个高，1 个较高，2 个中等，3 个较低，2 个低，1 个非常低；

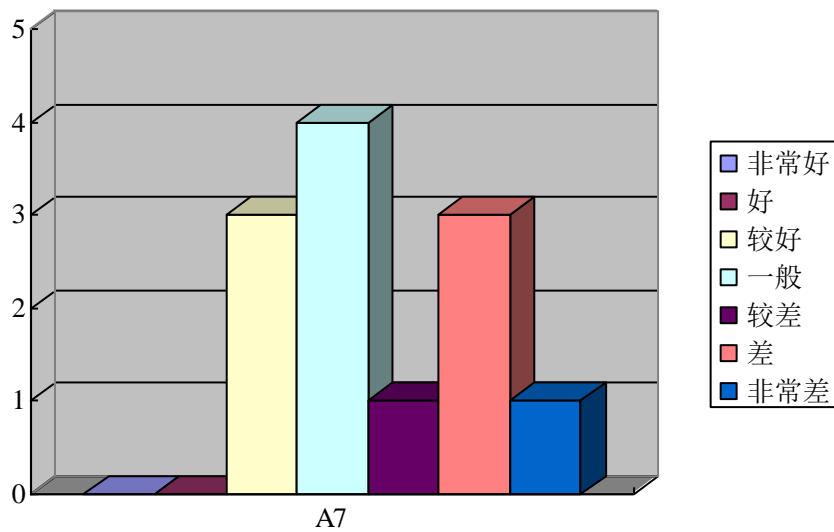


图 5-6 A_7 的准则值

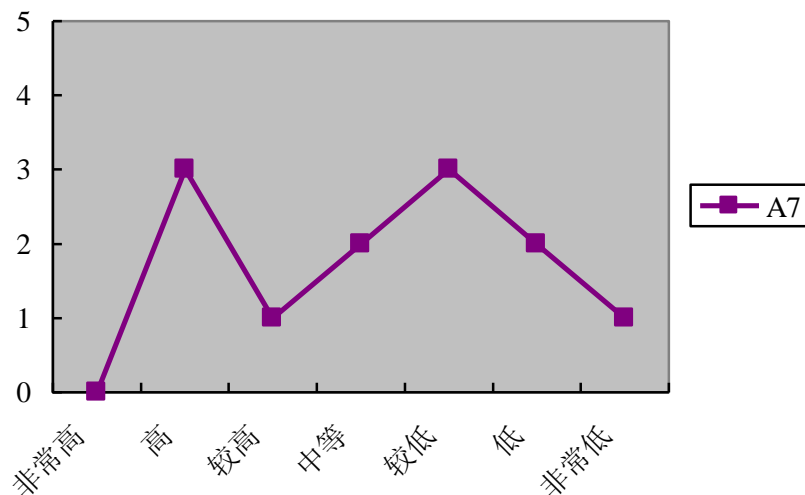


图 5-7 A_7 的确定程度

纵观这三个层次，它们的优劣程度是很明显的， A_1, A_2, A_3 要优于 A_4, A_5, A_6 ，而 A_7 表现最差。这一分析结果与前面决策方法中所得到的结果完全一致，这 7 个供应商共分为 3 个等级，最优的为 A_1, A_2, A_3 ，其次是 A_4, A_5, A_6 ，最差的是 A_7 ，

而在 A_1, A_2, A_3 中, 如果不考虑信心水平的影响, 那么 A_2, A_3 优于 A_1 , 这又将第一等级细化为两个等级。如果忽略各准则间的相互重要程度, 同等看待各准则, 则 A_2 优于 A_3 , 如果考虑各准则重要性的影响, 则 A_2, A_3 相差无几, 可以同等看待。

根据所采用的决策方法的不同, 每个等级中的准则会表现出不同的名次, 这是因为每个方案都包含很多方面的信息, 在某一方面表现优秀的方案在另一方面可能表现不佳, 因此决策者需要针对自己的需求, 关注于方案中更看重的部分, 采用适合自己的决策方法, 选出最需要的方案。

5.4 本章小结

在本文理论研究的基础上, 本章给出了基于二型三角模糊数的绿色供应商选择方法, 用以评价模糊环境下的供应商环境绩效, 以选出最优供应商。本章首先分析了绿色供应商选择的影响因素, 进而将理论研究部分的决策方法应用于绿色供应商选择问题中, 并比较和分析这些方法的结果。本章所提方法的优势是, 在缺少定量信息时评价供应商环境绩效的能力。上述方法可以应用到评价供应商环境绩效的实际问题中, 且合理有效。

此外, 如果决策者的目标是通过所有的准则来选择供应商 (也就是常规选择供应商的准则加上环境准则), 那么可以使用两阶段的决策方法, 首先选择出环境绩效较好的一些绿色供应商, 然后用常规准则 (也就是成本、服务质量、提前期、交付情况、产品质量等) 再次按照前面的决策方法来评价这些绿色供应商, 选择出最好的供应商。

结束语

本文在已有研究成果的基础上,提出二型三角模糊数这一概念,进而提出相关定义,研究其信息集结方法,并用其解决难以定量计算的多准则决策问题,先后给出了选出实际上最好方案和选出决策者最满意方案(由于决策者感情因素的影响,方案未必最好)的决策方法。主要研究成果如下:

(1) 根据二型模糊集的性质,结合现有模糊数运算规则的特点,定义了二型三角模糊数及其运算法则,在此基础上定义了二型三角模糊数的记分函数、可能度公式和距离,并证明了相关性质、定理。

(2) 定义了二型三角模糊数的一些信息集成算子: $TT2OWA$ 算子、 $TT2WAA$ 算子、 $TT2HA$ 算子、 $ITT2OWA$ 算子等加性算子以及相应的积型算子,同时定义了准则间有关联时的集结算子,进而将这些算子应用于多准则决策领域。针对准则权重已知且准则值为二型三角模糊数的多准则决策问题,根据不同的决策需求,选用上述不同的信息集结算子来集结二型三角模糊数的信息,以解决相应的模糊多准则决策问题,并详细讨论了其实现步骤。

(3) 经过对现有的求解准则权重方法的研究,给出了两种求解准则权重的方法。其中,综合隶属系数最大化方法的原理是根据隶属度所反映出的决策者对决策信息的掌握程度,建立模型使隶属系数最大化,此方法属于客观赋权法,在存在主观权重的情况下,可以扩展为组合赋权法,同时,此方法也可以用于求解决策者权重;特征权值方法改变了现有赋权方法中单一目标的现状,提出求解准则权重是一个多目标行为的概念,根据影响权重的两方面因素建立模型,求解出最合理的权重。

(4) 在二型三角模糊数的信息集结算子的基础上,给出 3 种模糊多准则决策方法:

基于聚类的二型三角模糊多准则决策方法给出将方案分层次的方法,它将各方案按照优劣程度分为几个层次。该方法首先计算出整体效益值和个别遗憾值,分别得出使整体效益最大、最小的值和分别使个别遗憾最小、最大的值,将这些值组成理想方案和负理想方案,并将这两个假设的方案加入原方案集中得到新方案集,计算新方案集中各方案的相似度,并对相似度矩阵进行模糊聚类;

基于后悔理论的二型三角模糊多准则决策方法将后悔/欣喜情感加入决策过程,减少后悔成分,给出了选出决策者最满意方案的方法。该方法首先确定最优方案,进而计算出各备选方案的效用值和后悔值,得到后悔效用矩阵,然后利用优序函数计算出后悔效用值的优序指数,求得优序正流和优序负流,从而得到优

序净流，利用优序净流对方案排序；

基于理想点的二型三角模糊多准则决策方法考虑了人们面对一个范围时的态度，研究模糊范围在他们心里的估计值，以使决策信息更真实的反映决策者的心理值。该方法首先求得决策者对各方案的心态指标，然后寻找出正理想点与负理想点，计算各方案到正、负理想点的差的绝对值，进而计算出各方案的综合属性值，并按其排序。

(5) 将文中的部分理论运用到了绿色供应商选择中，提出了基于二型三角模糊数的绿色供应商选择方法。首先分析了绿色供应商选择的影响因素，通过回顾文献和分析总结，确定了 12 个决策准则；其次，收集采购人员提供的决策信息，并将它们转化为更适宜决策的二型三角模糊信息；再次，分别使用基于 *ITT2OWA* 算子的二型三角模糊多准则决策方法和基于聚类的二型三角模糊多准则决策方法进行决策，得到决策结果；最后，将它们的结果和简单加权平均的结果进行比较和分析，讨论了出现这种结果的原因，并进一步分析了采购人员给出的决策信息，以验证上述方法的结果和实际情况一致，上述决策方法是有效的。

然而，本文依然存在着一一些局限性和需要进一步研究的地方，主要表现在以下 5 个方面：

(1) 本文中所采用的准则权重均为客观权重且均为实数，准则权重对决策结果有着很大的影响，因此值得将决策者给出的主观权重加入到决策过程中，而准则权重为模糊数的情况也值得探讨；

(2) 基于后悔理论的二型三角模糊多准则决策方法中，相关的参数还不完善，本文中采用的是前景理论中的参数，但是前景理论中的参数是不是完全适合于后悔理论还有待考证，因此需要专门针对后悔理论研究其参数设置；

(3) 对于各种决策方法分别适用于哪种情况的决策问题，本文的分析还较浅显，常用的决策方法有很多种，本文只涉及其中的一部分情况，没有完整的分析决策方法和决策问题间的对应关系；

(4) 本文所针对的决策问题都是准则间相互独立的，可进一步研究准则间相互关联的决策问题；

(5) 除选择绿色供应商之外，本文给出的决策方法还可以应用到很多领域，有待进一步研究。

参考文献

- [1] Sevastjanov P, Figat P. Aggregation of aggregating modes in MCDM: Synthesis of Type 2 and Level 2 fuzzy sets[J]. *Omega*, 2007, 35: 505-523.
- [2] Hwang C M, Yang M S, Hung W L, et al. Similarity, inclusion and entropy measures between type-2 fuzzy sets based on the Sugeno integral[J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 2011, 53: 1788-1797.
- [3] Zhai D Y, Mendel J M. Uncertainty measures for general Type-2 fuzzy sets[J]. *Information Sciences*, 2011, 181: 503-518.
- [4] Aisbett J, Rickard J T, Morgenthaler D. Multivariate modeling and type-2 fuzzy sets[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2011, 163: 78-95.
- [5] Dereli T, Baykasoglu A, Altun K, et al. Industrial applications of type-2 fuzzy sets and systems: A concise review[J]. *Computers in Industry*, 2011, 62: 125-137.
- [6] Qin R, Liu Y K, Liu Z Q. Methods of critical value reduction for type-2 fuzzy variables and their Applications[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2011, 235: 1454-1481.
- [7] Mendel J M. Advances in type-2 fuzzy sets and systems[J]. *Information Sciences*, 2007, 177: 84-110.
- [8] Zhou S M, Chiclana F, John R I. Alpha-level aggregation: a practical approach to type-1 OWA operation for aggregating uncertain information with applications to breast cancer treatments[J]. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 2011, 23: 1455-1468.
- [9] Li D F, Chen G H, Huang Z G. Linear programming method for multiattribute group decision making using IF sets[J]. *Information Sciences*, 2010, 180: 1591-1609.
- [10] Chen S M, Lee L W. Fuzzy multiple attributes group decision-making based on the interval type-2 TOPSIS method[J]. *Expert Systems with Applications*, 2010, 37 (4): 2790-2798.
- [11] Yang W E, Wang J q, Wang X f. An outranking method for multi-criteria decision making with duplex linguistic information[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2012, 198: 20-33.
- [12] Hwang C L, Yoon K. Multiple attribute decision making-methods and applications: A state-of-the-art survey[M]. New York: Springer-Verlag, 1981.
- [13] Zadeh L A. Fuzzy set[J]. *Information and Control*, 1965, 8 (2): 338-353.

- [14] Bellman R E, Zadeh L A. Decision-making in a fuzzy environment[J]. *Management Science*, 1970, 17 (5): 141~164.
- [15] 李荣钧. 模糊多准则决策理论与应用[M]. 北京: 科学出版社, 2002.
- [16] 徐泽水. 基于期望值的模糊多属性决策法及其研究[J]. *系统工程理论与实践*, 2004, 24 (1): 109-113.
- [17] Wang Y M, Parkan C. Multiple attribute decision making based on fuzzy preference information on alternatives: Ranking and weighting[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2005, 153 (3): 331-346.
- [18] Yang J B, Wang Y M, Xu D L. The evidential reasoning approach for MADA under both probabilistic and fuzzy uncertainties[J]. *European Journal of Operational Research*, 2006, 171 (1): 309-343.
- [19] 陈晓红, 阳熹. 一种基于三角模糊数的多属性群决策方法[J]. *系统工程与电子技术*, 2008, 30: 278-282.
- [20] Atanassov K T. Intuitionistic fuzzy sets[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1986, 20 (1): 87-96.
- [21] Xu Z S, Yager R R. Some geometric aggregation operations based on intuitionistic fuzzy sets[J]. *International Journal of General Systems*, 2006, 35 (4): 417-433.
- [22] Xu Z S. Intuitionistic fuzzy aggregation operators[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2007, 15 (6): 1-10.
- [23] Boran F E, Genc S, Kurt M, et al. A multi-criteria intuitionistic fuzzy group decision making for supplier selection with TOPSIS method[J]. *Expert Systems with Applications*, 2009, 36 (8): 11363-11368.
- [24] 陈晓红. 复杂大群体决策方法及应用[M]. 北京: 科学出版社, 2009.
- [25] Feng X, Qian G. The Method of Grey Related Analysis to Multiple Attribute Decision Making Problems with Intuitionistic Fuzzy Sets[J]. *International Conference on E-Business and E-Government*, 2010: 1588-1591.
- [26] 王坚强. 模糊多准则决策方法研究综述[J]. *控制与决策*, 2008, 23 (6): 601-606,612.
- [27] Hejazi S R, Doostparast A, Hosseini S M. An improved fuzzy risk analysis based on a new similarity measures of generalized fuzzy numbers[J]. *Expert Systems with Applications*, 2011, 38: 9179-9185.
- [28] Kuo M S, Liang G S, Huang W C. Extensions of the multicriteria analysis with pairwise comparison under a fuzzy environment[J]. *International Journal of*

- Approximate Reasoning, 2006, 43: 268-285.
- [29] Nezhad S S, Damghani K K. Application of a fuzzy TOPSIS method base on modified preference ratio and fuzzy distance measurement in assessment of traffic police centers performance[J]. Applied Soft Computing, 2010, 10: 1028-1039.
- [30] Atanassov K, Gerganov G. Interval-valued intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1989, 31 (3): 343-349.
- [31] 徐泽水, 陈剑. 一种基于区间直觉判断矩阵的群决策方法[J]. 系统工程理论与实践, 2007, 27 (4): 126-133.
- [32] 魏翠萍, 夏梅梅, 张玉忠. 基于区间直觉模糊集的多准则决策方法[J]. 控制与决策, 2009, 24 (8): 1230-1234.
- [33] 刘锋, 袁学海. 模糊数直觉模糊集[J]. 模糊系统与数学, 2007, 21 (1): 88-91.
- [34] 王坚强, 张忠. 基于直觉梯形模糊数的信息不完全确定的多准则决策方法[J]. 控制与决策, 2009, 24 (2): 226-230.
- [35] Shu M H, Cheng C H, Chang R J. Using intuitionistic fuzzy sets for fault-tree analysis on printed circuit board assembly[J]. Microelectronics Reliability, 2006, 46 (12): 2139-2148.
- [36] 王坚强, 李寒波. 基于直觉语言集结算子的多准则决策方法[J]. 控制与决策, 2010, 25 (10): 1571-1574, 1584.
- [37] Li D F. A ratio ranking method of triangular intuitionistic fuzzy numbers and its application to MADM problems[J]. Computers & Mathematics With Applications, 2010, 60 (6): 1557-1570.
- [38] Dubois D, Prade H. Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications[M]. New York: Academic Press, 1980.
- [39] Dubois D, Prade H. Fuzzy sets systems[M]. New York: Academic Press, 1980.
- [40] Mizumoto M, Tanaka K. Some properties of fuzzy sets of type-2[J]. Information and Control, 1976, 31: 312-340.
- [41] Karnik N N, Mendel J M. Operations on type-2 fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 122: 327-348.
- [42] Wu D, Mendel J M. Uncertainty measures for interval type-2 fuzzy sets[J]. Information Sciences, 2007, 177: 5378-5393.
- [43] Karnik N N, Mendel J M. Centroid of a type-2 fuzzy set[J]. Information Sciences, 2001, 132: 195-220.
- [44] Mendel J M, John R I, Liu F L. Interval type-2 fuzzy logical systems made simple[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2006, 14 (6): 808-821.

- [45] Gera Z, Dombi J. Type-2 implications on non-interactive fuzzy truth values[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2008, 159: 3014-3032.
- [46] Harding J, Walker C, Walker E. The variety generated by the truth value algebra of type-2 fuzzy sets[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2010, 161: 735-749.
- [47] Zhou S M, Chiclana F, John R I, et al. Type-1 OWA operators for aggregating uncertain information with uncertain weights induced by type-2 linguistic quantifiers[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2008, 159: 3281-3296.
- [48] Walker C L, Walker E A. Sets with type-2 operations[J]. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2009, 50: 63-71.
- [49] Yang M S, Lin D C. On similarity and inclusion measures between type-2 fuzzy sets with an application to clustering[J]. *Computers and Mathematics with Applications*, 2009, 57: 896-907.
- [50] Coupland S, John R. New geometric inference techniques for type-2 fuzzy sets[J]. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2008, 49: 198-211.
- [51] Mendel J M. On answering the question "Where do I start in order to solve a new problem involving interval type-2 fuzzy sets?"[J]. *Information Sciences*, 2009, 179: 3418-3431.
- [52] Mendel J M, Wu H. New results about the centroid of an interval type-2 fuzzy set, including the centroid of a fuzzy granule[J]. *Information Sciences*, 2007, 177: 360-377.
- [53] Mendel J M. On a 50% savings in the computation of the centroid of a symmetrical interval type-2 fuzzy set[J]. *Information Sciences*, 2005, 172: 417-430.
- [54] Chen S M, Lee L W. Fuzzy interpolative reasoning for sparse fuzzy rule-based systems based on interval type-2 fuzzy sets[J]. *Expert Systems with Applications*, 2011, 38: 9947-9957.
- [55] Greenfield S, Chiclana F, Coupland S, et al. The collapsing method of defuzzification for discretised interval type-2 fuzzy sets[J]. *Information Sciences*, 2009, 179: 2055-2069.
- [56] Fard S P, Zainuddin Z. Interval type-2 fuzzy neural networks version of the Stone-Weierstrass theorem[J]. *Neurocomputing*, 2011.
- [57] Liu H C. Type 2 Generalized Intuitionistic Fuzzy Choquet Integral Operator for Multi-Criteria Decision Making[J]. *International Symposium on Parallel and Distributed Processing with Applications*, 2010, 46: 605-611.
- [58] Chen S M, Lee L W. Fuzzy multiple attributes group decision-making based on

- the ranking values and the arithmetic operations of interval type-2 fuzzy sets[J]. *Expert Systems with Applications*, 2010, 37: 824-833.
- [59] Wu D, Mendel J M. A comparative study of ranking methods, similarity measures and uncertainty measures for interval type-2 fuzzy sets[J]. *Information Sciences*, 2009, 179: 1169–1192.
- [60] Wu D, Mendel J M. A vector similarity measure for linguistic approximation: Interval type-2 and type-1 fuzzy sets[J]. *Information Sciences*, 2008, 178: 381-340.
- [61] Akay D, Kulak O, Henson B. Conceptual design evaluation using interval type-2 fuzzy information axiom[J]. *Computers in Industry*, 2011, 62: 138-146.
- [62] Choi B I, Rhee F C H. Interval type-2 fuzzy membership function generation methods for pattern recognition[J]. *Information Sciences*, 2009, 179: 2102-2122.
- [63] Li Y, Hua J. Type-2 fuzzy mathematical modeling and analysis of the dynamical behaviors of complex ecosystems[J]. *Simulation Modelling Practice and Theory*, 2008, 16: 1379-1391.
- [64] 徐泽水. 对方案有偏好的三角模糊数型多属性决策方法研究[J]. *系统工程与电子技术*, 2002, 24 (8): 9-12.
- [65] 杨静, 邱苑华. 基于投影技术的三角模糊数型多属性决策方法研究[J]. *控制与决策*, 2009, 24 (4): 637-640.
- [66] Wang Y M. On fuzzy multiattribute decision-making models and methods with incomplete preference information[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2005, 151 (2): 285-301.
- [67] 陈晓红, 刘益凡. 基于区间数群决策矩阵的专家权重确定方法及其算法实现[J]. *系统工程与电子技术*, 2010, 32: 2128-2131.
- [68] 王坚强. 信息不完全确定的多准则模糊 UTA 方法[J]. *系统工程与电子技术*, 2006, 4: 545-550.
- [69] 杨纶标, 高英仪. 模糊数学原理及其应用(第三版)[M]. 广州: 华南理工大学出版社, 2004.
- [70] 徐泽水. 不确定多属性决策方法及应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.
- [71] Wei G W. Maximizing deviation method for multiple attribute decision making in intuitionistic fuzzy setting[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2008, 21: 833-836.
- [72] Wu J Z, Zhang Q. Multicriteria decision making method based on intuitionistic fuzzy weighted entropy[J]. *Expert Systems with Applications*, 2011, 38: 916-922.
- [73] Wang J Q, Li J J. Multi-criteria fuzzy decision-making method based on cross entropy and score functions[J]. *Expert Systems with Applications*, 2011, 38:

1032-1038.

[74] Ye J. Multicriteria fuzzy decision-making method using entropy weights-based correlation coefficients of interval-valued intuitionistic fuzzy sets[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2010, 34: 3864-3870.

[75] 万俊, 邢焕革, 张晓晖. 基于熵理论的多属性群决策专家权重的调整算法[J]. *控制与决策*, 2010, 25 (6): 907-910.

[76] Zhang J, Wu D, Olson D L. The method of grey related analysis to multiple attribute decision making problems with interval numbers[J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 2005, 42: 991-998.

[77] 徐泽水. 多属性决策的组合赋权方法研究权重[J]. *中国管理科学*, 2002, 10 (2): 84-87.

[78] 陶菊春, 吴建民. 综合加权评分法的综合权重确定新探[J]. *系统工程理论与实践*, 2001, 8 (7): 43-48.

[79] Ullahkhan S, Niazi M, Ahmad R. Factors influencing clients in the selection of offshore software outsourcing vendors: An exploratory study using a systematic literature review[J]. *Journal of systems and software*, 2011, 84 (4): 686-699.

[80] Stonemetz J. Anesthesia Information Management Systems Marketplace and Current Vendors[J]. *Anesthesiology Clinics*, 2011, 29 (3): 367-375.

[81] Yu M C, Goh M, Lin H C. Fuzzy multi-objective vendor selection under lean procurement[J]. *European Journal of Operational Research*, 2012, 219 (2): 305-311.

[82] Wang J W, Cheng C H, Huang K C. Fuzzy hierarchical TOPSIS for supplier selection[J]. *Applied Soft Computing*, 2009, 9 (1): 377-386.

[83] Onut S, Kara S S, Isik E. Long term supplier selection using a combined fuzzy MCDM approach: a case study for a telecommunication company[J]. *Expert Systems with Applications*, 2009, 36 (2): 3887-3895.

[84] Degraeve Z, Labro E, Roodhooft F. An evaluation of supplier selection methods from a total cost of ownership perspective[J]. *European Journal of Operational Research*, 2000, 125 (1): 34-58.

[85] Weber C A, Current J R, Benton W C. Vendor selection criteria and methods[J]. *European Journal of Operational Research*, 1991, 50 (1): 2-18.

[86] De Boer L, Labro E, Morlacchi P. A review of methods supporting supplier selection[J]. *European Journal of Purchasing and Supply Management*, 2001, 7 (2): 75-89.

[87] Ho W, Xu X, Dey P K. Multi-criteria decision making approaches for supplier

- evaluation and selection: a literature review[J]. *European Journal of Operational Research*, 2010, 202 (1): 16-24.
- [88] Wong C W Y, Lai K h, Shang K C, et al. Green operations and the moderating role of environmental management capability of suppliers on manufacturing firm performance[J]. *International Journal of Production Economics*, 2011, In Press.
- [89] Large R O, Thomsen C G. Drivers of green supply management performance: Evidence from Germany[J]. *Journal of Purchasing and Supply Management*, 2011, 17 (3): 176-184.
- [90] Zhu Q H. Relationships between operational practices and performance among early adopters of green supply chain management practices in Chinese manufacturing enterprises[J]. *Journal of Operations Management*, 2004, 22 (3): 265-289.
- [91] Yeh W C, Chuang M C. Using multi-objective genetic algorithm for partner selection in green supply chain problems[J]. *Expert Systems with Applications*, 2011, 38 (4): 4244-4253.
- [92] Tseng M L. Green supply chain management with linguistic preferences and incomplete information[J]. *Applied Soft Computing*, 2011, 11 (8): 4894-4903.
- [93] Shang K C, Lu C S, Li S. A taxonomy of green supply chain management capability among electronics-related manufacturing firms in Taiwan[J]. *Journal of Environmental Management*, 2010, 91 (5): 1218-1226.
- [94] Sheu J B. Bargaining framework for competitive green supply chains under governmental financial intervention[J]. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 2011, 47 (5): 573-592.
- [95] Lin R J. Using fuzzy DEMATEL to evaluate the green supply chain management practices[J]. *Journal of Cleaner Production*, 2011, In Press.
- [96] Hsu C W, Kuo T C, Chen S H, et al. Using DEMATEL to develop a carbon management model of supplier selection in green supply chain management[J]. *Journal of Cleaner Production*, In Press.
- [97] Tuzkaya G, Ozgen A, Ozgen D, et al. Environmental performance evaluation of suppliers: a hybrid fuzzy multi-criteria decision approach[J]. *International Journal of Environmental Science and Technology*, 2009, 6 (3): 477-490.
- [98] Awasthi A, Chauhan S S, Goyal S K. A fuzzy multicriteria approach for evaluating environmental performance of suppliers[J]. *International Journal of Production Economics*, 2010, 126 (2): 370-378.
- [99] Chiou T Y, Chan H K, Lettice F, et al. The influence of greening the suppliers and

green innovation on environmental performance and competitive advantage in Taiwan[J]. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 2011, 47 (6): 822-836.

[100] Fu X, Zhu Q, Sarkis J. Evaluating green supplier development programs at a telecommunications systems provider[J]. *International Journal of Production Economics*, 2011, In Press.

[101] Bai C, Sarkis J. Integrating sustainability into supplier selection with grey system and rough set methodologies.[J]. *International Journal of Production Economics*, 2010, 124 (1): 252-264.

[102] Bai C, Sarkis J. Green supplier development: analytical evaluation using rough set theory[J]. *Journal of Cleaner Production*, 2010, 18 (12): 1200-1210.

[103] Lee A H I, Kang H Y, Hsu C F, et al. A green supplier selection model for high-tech industry[J]. *Expert Systems with Applications*, 2009, 36 (4): 7917-7927.

[104] Büyüközkan G, Çifçi G. A novel hybrid MCDM approach based on fuzzy DEMATEL, fuzzy ANP and fuzzy TOPSIS to evaluate green suppliers[J]. *Expert Systems with Applications*, 2012, 39 (3): 3000-3011.

[105] Kuo R J, Wang Y C, Tien F C. Integration of artificial neural network and MADA methods for green supplier selection[J]. *Journal of Cleaner Production*, 2010, 18 (12): 1161-1170.

[106] Tsai Y L, Yang Y J, Lin C H. A dynamic decision approach for supplier selection using ant colony system[J]. *Expert Systems with Applications*, 2010, 37: 8313-8321.

[107] Shaw K, Shankar R, Yadav S S, et al. Supplier selection using fuzzy AHP and fuzzy multi-objective linear programming for developing low carbon supply chain[J]. *Expert Systems with Applications*, 2012, 39 (9): 8182-8192.

[108] Zadeh L A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning[J]. *Information Sciences*, 1975, 8: 199-249.

[109] Mendel J M, John R I. Type-2 fuzzy sets made simple[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2002, 10 117-127.

[110] Karnik N N, Mendel J M. An introduction to type-2 fuzzy logic systems[R]: USC Report, 1998.

[111] 达庆利, 刘新旺. 区间数线性规划及其满意解[J]. *系统工程理论与实践*, 1999, 19 (4): 3-7.

[112] Yager R R. On ordered weighted averaging aggregation operators in

- multi-criteria decision making[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 1988, 18: 183-190.
- [113] Yager R R, Filev D P. Induced ordered weighted averaging operators[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 1999, 29: 141-150.
- [114] Chiclana F, Herrera F, Herrera V E. The ordered weighted geometric operator: properties and application[C]. Madrid, Spain, 2000: 985-991.
- [115] Yager R R. The power average operator[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part A, 2001, 31: 724-731.
- [116] Xu Z. Approaches to multiple attribute group decision making based on intuitionistic fuzzy power aggregation operators[J]. Knowledge-Based Systems, 2011, 24: 749-760.
- [117] Chen C T. Extensions of the TOPSIS for group decision-making under fuzzy environment[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2000, 114: 1-9.
- [118] Wang J Q, Han Z Q, Zhang H Y. Multi-criteria Group Decision-Making Method Based on Intuitionistic Interval Fuzzy Information[J]. Group Decision and Negotiation, 2012.
- [119] Loomes G, Sugden R. Regret theory: An alternative theory of rational choice under uncertainty[J]. The Economic Journal, 1982, 92 (368): 805-824.
- [120] Bell D E. Regret in decision making uncertainty[J]. Operations Research, 1982, 30 (5): 961-981.
- [121] 刘腾飞, 徐富明, 张军伟, 等. 安于现状偏差的心理机制、影响因素及应用启示[J]. 心理科学进展, 2010, 18 (10): 1636-1643.
- [122] Varian H R. Microeconomic analysis(third edition)[M]. New York: W. W. Norton & Company, 1992.
- [123] 张顺明, 叶军. 后悔理论述评[J]. 系统工程, 2009, 2: 45-50.
- [124] Tversky A, Kahneman D. Advances in prospect theory: cumulative representation of uncertainty[J]. Journal of Risk and Uncertainty, 1992, 5 (4): 297-323.
- [125] Kahneman D, Tversky A. Prospect theory: An analysis of decision under risk[J]. *Economica*, 1979, 47 (2): 263-291.
- [126] Quiggin J. Regret theory with general choice sets[J]. Journal of Risk and Uncertainty, 1994, 8 (2): 153-165.
- [127] Laciara C E, Weber E U. Correcting expected utility for comparisons between alternative outcomes: A unified parameterization of regret and disappointment[J].

- Journal of Risk under Uncertainty, 2008, 36 (1): 1-17.
- [128] 万树平. 区间型多属性决策的心态指标法[J]. 控制与决策, 2009, 24 (1): 35-38.
- [129] 陈晓红, 李大元, 游达明, 等. “两型社会”建设评价理论与实践[M]. 北京: 经济科学出版社, 2012.
- [130] Bala A, Munoz P, Rieradevall J, et al. Experiences with greening suppliers. The Universitat Autònoma de Barcelona[J]. Journal of Cleaner Production, 2008, 16 (15): 1610-1619.
- [131] Jabbour A B L S, Jabbour C J C. Are supplier selection criteria going green? Case studies of companies in Brazil[J]. Industrial Management & Data Systems, 2009, 109 (4): 477-495.
- [132] Enarsson L. Evaluation of suppliers: how to consider the environment[J]. International Journal of Physical Distribution and Logistics Management, 1998, 28 (1): 5-17.
- [133] Humphreys P, McIvor R, Chan F. Using case-based reasoning to evaluate supplier environmental management performance[J]. Expert Systems with Applications, 2003, 25 (2): 141-153.
- [134] Humphreys P, McCloskey A, McIvor R, et al. Employing dynamic fuzzy membership functions to assess environmental performance in the supplier selection process[J]. International Journal of Production Research, 2006, 44 (12): 2379-2419.
- [135] Handfield R, Walton S V, Sroufe R, et al. Applying environmental criteria to supplier assessment: A study in the application of the analytical hierarchy process[J]. European Journal of Operational Research, 2002, 141 (1): 70-87.
- [136] Zhang H C, Li J, Merchant M E. Using fuzzy multi-agent decision-making in environmentally conscious supplier management[J]. CIRP Annals-Manufacturing Technology, 2003, 52 (1): 385-388.
- [137] Noci G. Designing "green" vendor rating systems for the assessment of a supplier's environmental performance[J]. European Journal of Purchasing & Supply Management, 1997, 3 (2): 103-114.
- [138] Walton S V, Handfield R B, Melnyk S A. The green supply chain: integrating suppliers into environmental management processes[J]. Journal of Supply Chain Management, 2006, 34 (2): 2-11.
- [139] Lu L Y Y, Wu C H, Kuo T C. Environmental principles applicable to green supplier evaluation by using multi-objective decision analysis[J]. International Journal

of Production Research, 2007, 45 (18-19): 4317-4331.

[140] Humphreys P K, Wong Y K, Chan F T S. Integrating environmental criteria into the supplier selection process[J]. Journal of Materials Processing Technology, 2003, 138 (1-3): 349-356.

[141] Min H, Galle W P. Green purchasing strategies: trends and implications[J]. International Journal of Purchasing and Materials, 1997, 33 (3): 10-17.

[142] Awasthi A, Chauhan S S, Goyal S K. A fuzzy multicriteria approach for evaluating environmental performance of suppliers[J]. International Journal of Production Economics, 2010, 126: 370-378.

致 谢

两年多的研究生学习生涯即将结束，值此论文完成之际，谨向所有关心、支持和帮助过我的各位老师致以衷心的感谢！

在导师王坚强教授的悉心指导下，我完成了这篇论文。感谢王老师，从论文的选题、框架的构建、研究思路到最后的修改、定稿都给予了细心的指导和帮助，而其对我的高标准严要求又使我能时刻保持踏实的心态。王老师深厚的学术功底、严谨的治学态度以及对研究的强烈兴趣深刻地影响着我，让我受益匪浅，并会一直促使我在今后的学习和工作中养成精益求精的习惯，同时其高尚的人格更是让我由衷的敬佩，在此谨向王老师致以崇高的敬意！

非常感谢陈晓红教授及其带领下的“复杂环境下不确定性决策的理论与应用研究”国家创新群体中的各位老师的指导与支持。本文的研究成果离不开这些老师为我营造的规范的学习环境、优美舒适的生活环境以及丰富的学习资源，使我能潜心学习。陈晓红院长严谨的治学态度和爱岗敬业的高尚情操深深的感动着我，同时，陈院长丰富的科研经验和管理经验以及对事业的满腔热情让我深受鼓舞。

感谢高阳教授一直以来的指导和督促，高老师的幽默与博学为完成论文的艰苦旅程增添了许多欢乐与轻松，而高老师严肃认真的态度、高尚的人格以及高标准的学习要求更是时刻鞭策着我，使我不断前进。

感谢陈可老师对我学习上的指导和生活上的关心，是陈老师的循循善诱和热心帮助使我在遇到困难的时候能乐观面对。陈老师积极认真的生活态度、精益求精的治学态度以及对我们的无私关怀更使我深受感染。

感谢商学院所有教育和关怀过我的老师，他们在教育岗位上的辛勤耕耘深深地感染着我，他们无私地教诲，使我受益终生。感谢母校中南大学对我的教育和培养。感谢师兄师姐汪新凡、杨恶恶、李康建、毛利明、刘淘等，我所有取得的成绩都与他们的支持与帮助紧密相联。感谢王佩、谭秀清、荣凯、陈冰冰、喻银燕、罗燕玲、张砚、林增钰以及所有关心和帮助过我的同学和朋友，我的每一次进步都离不开他们的关心和鼓励。

真诚感谢父母的养育之恩和二十多年来对我的殷切期望以及一贯鼓励。他们朴实的教诲指点了我心灵摆渡的方向，他们的支持和鼓励给了我不断进取的力量和克服困难的勇气。

最后，还要感谢很多素未谋面的专家学者，正是在他们研究成果的基础上，我才能够进行学习和探讨，顺利完成本文。

攻读学位期间主要研究成果

1. 已发表论文及待发表论文

[1] Jian-qiang Wang, Zhi-qiu Han, Hong-yu Zhang. Multi-criteria group decision making method based on intuitionistic interval fuzzy information [J]. Group Decision and Negotiation. 2012. (已录用).

[2] 王坚强,韩知秋. 基于二型三角诱导 OWA 算子的多准则决策方法[J]. 控制与决策. 2012. (已录用).

2. 项目

[1] 国家自然科学基金, 基于直觉模糊数的随机多准则决策方法及其在应急处理方案评价与选择中的应用研究.

[2] 国家自然科学基金, 信息不完全确定的灰色模糊随机多准则决策方法及应用研究.

[3] 参与编写《不确定多准则决策方法》.